2026 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2026 年 2 月 12 日）

数学 I (9:30 – 11:30)

(1) 線形代数，微分積分 計 4 題を解答しなさい．

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

(3) すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

(4) 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用すること．(ボールペン使用不可)

(5) 試験終了後，答案用紙は 4 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１． a を実数とする．実数を成分にもつ 3 次正方行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3(a-1) \\ 3 & 1 & 3(a-1) \\ -2 & 0 & -2a+3 \end{bmatrix}$$

によって定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を全て求めよ．またそれぞれの固有値に対する固有空間の基底を 1 組ずつ求めよ．

(2) $P^{-1}AP,\ P^{-1}BP$ がともに対角行列となる正則行列 P が存在するような a の値を全て求めよ．

(3) (2) で求めた a の値それぞれに対し，$P^{-1}AP,\ P^{-1}BP$ がともに対角行列となる正則行列 P を 1 つ求めよ．

問題２． n は 2 以上の自然数，a は 1 でない実数とする．n 次正方行列 $P_n = [p_{i,j}]$，$Q_n = [q_{i,j}]$ を以下の通り定める．

$$p_{i,j} = \begin{cases} a & [i+1=j \text{ のとき}] \\ 1 & [\text{それ以外のとき}] \end{cases}, \quad q_{i,j} = \begin{cases} a & [i=j \text{ のとき}] \\ 1 & [\text{それ以外のとき}] \end{cases}$$

たとえば $n=2,3$ のときは以下の通りである．ただし，正方行列 X の行列式を $|X|$ で表す．

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ Q_2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ Q_3 = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix},$$

$$|P_2| = 1-a,\ |Q_2| = a^2-1,\ \frac{|Q_2|}{|P_2|} = -(a+1)$$

以下の問いに答えよ．

(1) $|P_3|$ を a の式で表せ．

(2) $\dfrac{|Q_3|}{|P_3|}$ を a の式で表せ．

(3) $\dfrac{|Q_n|}{|P_n|}$ を a と n の式で表せ．

問題３．　以下の問いに答えよ．

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^2+n^2}$ は発散することを示せ．

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ は区間 $[0,1]$ 上で一様収束することを証明し，次を示せ．

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan^{-1}(\frac{1}{n}).$$

ただし，$\tan^{-1}$ は $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ の逆関数とする．

問題４．　以下の問いに答えよ．

(1) 双曲線関数 $\sinh, \cosh, \tanh : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義される．$\tanh$ は微分可能な逆関数 $\tanh^{-1} : (-1,1) \to \mathbf{R}$ をもつことを示し，その導関数 $\dfrac{d}{dx} \tanh^{-1} x$ を求めよ．

(2) $\mathbf{R}^3$ の空間極座標変換 Φ：$\{(r,\theta,\varphi) \mid 0 < r, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \to \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ を

$$\begin{aligned} x =& r \sin\theta \cos\varphi, \\ y =& r \sin\theta \sin\varphi, \\ z =& r \cos\theta \end{aligned}$$

とする．Φ のヤコビアンを J_Φ とするとき，J_Φ を r, θ, φ を用いて表せ．

(3) $1/2 < a < 1$ とし，$\mathbf{R}^3$ の部分集合 K を

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{4} \leq x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\, z \geq 0 \right\}$$

と定める．このとき，3 重積分

$$I := \iiint_K \frac{1}{(1-(x^2+y^2+z^2)^3)\tanh^{-1}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$$

を $\tanh^{-1}$ を用いて表せ．

2026 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2026 年 2 月 12 日）

英語 (11:50 – 12:40)

(1) すべての問題に解答しなさい.

(2) 問題１ (1)，問題１ (2)，問題２ (1)，問題２ (2) ごとに別の答案用紙を用いること.

(3) すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

(4) 解答には黒鉛筆またはシャープペンシルを使用すること.（ボールペン使用不可）

(5) 試験終了後，答案用紙は 4 枚とも提出すること．問題用紙は各自持ち帰ること.

問題１．　次の和文を英訳せよ．ただし，最後の出典は訳さなくてよい．

(1) 出典：Anton-Busby, *Contemporary Linear Algebra* より抜粋・一部改変

(2) 出典：Weir-Hass, *Thomas' Calculus,* Twelfth Edition より抜粋・一部改変.

問題２．　次の英文を和訳せよ．ただし，最後の出典は訳さなくてよい．

(1)

(2)

出典： M. Spivak, *Calculus on Manifolds* より抜粋・一部改変.

出題意図

第 1 次試験（筆記）では数理科学における基礎的な学力を有しているかを見る．

- **数学 I** では，微分積分，線形代数（行列，線形写像，ベクトル空間）の基礎的内容が出題されている．試験問題は論述式であり，最終的な答の正否のみでなく答に至る過程の記述も採点の対象となる．

  問 1　線形代数に関する基礎的知識を問う．

  問 2　線形代数に関する基礎的知識を問う．

  問 3　微分積分に関する基礎的知識を問う．

  問 4　微分積分に関する基礎的知識を問う．

- **英語**では，英語で数学に関する文章を正しく読み書きできるかという基礎的能力を見る．

  問 1　数学に関する英作文（和文英訳を含む）の基礎的能力を問う．

  問 2　数学に関する英文和訳の基礎的能力を問う．