

2026年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科 数理科学専攻

入学試験（2025年8月26日）

数学 I (9:30 – 11:30)

- (1) 線形代数，微分積分 計4題を解答しなさい。
- (2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること。
- (3) すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること。
- (4) 試験終了後，答案用紙は4枚とも提出すること。問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること。

**問題 1.** ベクトル  $\boldsymbol{x}$  や行列  $A$  に対して  ${}^t\boldsymbol{x}$  や  ${}^tA$  はその転置を表すこととする. 実数を成分にもつ 2 次正方行列全体のなす実ベクトル空間を  $V$  とし, また  $k$  を実数とする.  $B \in V$  とし, ベクトル  $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$  は  $B\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x}$  を満たすベクトルであるとする.  $V$  の部分空間  $W$  を

$$W = \{A \in V \mid {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = 0\}$$

によって定める. 以下の問いに答えよ.

(1)  $A \in W$  であれば,  ${}^tBAB \in W$  であることを示せ.

(2) 以下,  $B = \begin{bmatrix} k-2 & 4 \\ -1 & k+2 \end{bmatrix}$  とし,  $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  とせよ.

(a)  $W$  の基底を一組求めよ.

(b) 線形写像  $f: W \rightarrow W$  を

$$A \mapsto {}^tBAB$$

によって定める.  $f$  が同型でないような  $k$  の値をすべて求めよ.

**問題 2.** 3 次実対称行列  $A$  を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

により定める. また, 関数  $R: \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbf{R}$  を 3 次列ベクトル  $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  に対して,

$$R(\boldsymbol{x}) = \frac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}$$

により定める. ただし,  ${}^t\boldsymbol{x}$  は  $\boldsymbol{x}$  を転置した行ベクトルを表す. 以下の問いに答えよ.

(1) 行列  $A$  の固有値を求め, 各固有値に対する固有ベクトルで長さが 1 のものを 1 つずつ求めよ.

(2) (1) で求めた固有ベクトル  $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$  を並べて行列  $P = [\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_3]$  とする.  $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  とするとき,  $R(P\boldsymbol{x})$  を  $x_1, x_2, x_3$  を用いて表せ.

(3) 関数  $R$  の最大値と最小値を求めよ.

**問題3.**  $n$  を1以上の整数とする.  $x^2 + y^2 \leq 1$  における関数  $f(x, y) = x^2 y^3 (1 - x^2 - y^2)^n$  の最大値と最小値を求めよ.

**問題4.**  $\mathbf{R}^2$  の部分集合  $[0, \infty) \times (0, \infty)$  で連続関数  $f(x, \alpha)$  が定義され, 任意の  $\alpha \in (0, \infty)$  に対して関数  $h_\alpha(x) := f(x, \alpha)$  は  $[0, \infty)$  で可積分であるとする. 広義積分  $F(\alpha) := \int_0^\infty f(x, \alpha) dx$  が,  $\alpha$  に関して区間  $(0, \infty)$  で広義一様収束するとは, 任意の有界閉区間  $I \subset (0, \infty)$  に対して, 収束  $\int_0^R f(x, \alpha) dx \rightarrow F(\alpha) \ (R \rightarrow \infty)$  が  $I$  で一様であることをいう. 以下の問いに答えよ.

(1) 広義積分  $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx$  は  $\alpha$  に関して区間  $(0, \infty)$  で広義一様収束することを示し,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

が成り立つことを示せ. ただし,  $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  であることは証明なしで用いてよい.

(2) 自然数  $N$  を固定し,  $g_N(\alpha) = \int_0^N f(x, \alpha) dx$  と定める. また,  $0 < \varepsilon < t < \infty$  とする. このとき, 関数  $g_N(\alpha)$  は区間  $[\varepsilon, t]$  で連続であることを示せ.

(3) 広義積分  $F(\alpha) := \int_0^\infty f(x, \alpha) dx$  が,  $\alpha$  に関して区間  $(0, \infty)$  で広義一様収束するならば, 任意の  $\varepsilon, t$  ( $0 < \varepsilon < t < \infty$ ) に対して  $F(\alpha)$  は区間  $[\varepsilon, t]$  で連続であり,

$$\int_0^\infty \left( \int_\varepsilon^t f(x, \alpha) d\alpha \right) dx = \int_\varepsilon^t F(\alpha) d\alpha$$

が成り立つことを示せ.

(4) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-tx^2}}{x^2} dx = \sqrt{\pi t} \quad (t > 0).$$

2026年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科 数理科学専攻

入学試験（2025年8月26日）

数学 II（13:00 – 14:30）

- (1) 問題は全部で9題ある。そのうちの2題を選択して解答しなさい。
- (2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること。
- (3) すべての答案用紙に、氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること。
- (4) 試験終了後、答案用紙は2枚とも提出すること。問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること。

問題 1.  $a$  を実数とする. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 4a + 1 & 4a + 2 & -2a \\ -2a & -2a - 2 & a - 1 \\ 4a + 2 & 4a & -2a - 2 \end{bmatrix}$$

に対し, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $A$  が直交対角化可能 (直交行列によって対角化可能) であるとき,  $a$  の値を求めよ.
- (2)  $A$  が直交対角化可能でないとき,  $A$  のジョルダン標準形  $J$  を 1 つ求めよ.
- (3) (2) の  $J$  に対して  $P^{-1}AP = J$  となる直交行列  $P$  が存在するとき,  $a$  の値をすべて求めよ.

**問題 2.**  $A$  を単位元  $1$  をもつ可換環,  $I$  と  $J$  を  $A$  のイデアルとする. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $I$  が単項イデアルで  $I = JI$  が成り立つならば,  $(1 - y)I = \{0\}$  を満たす  $y \in J$  が存在することを示せ.
- (2)  $I$  が  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ) で生成され  $I = JI$  が成り立つとき,  $I'$  を  $x_2, \dots, x_n$  で生成されるイデアルとすると  $I' = JI'$  が成り立つことを示せ.
- (3)  $I$  が有限生成で  $I = JI$  が成り立つならば,  $(1 - y)I = \{0\}$  を満たす  $y \in J$  が存在することを示せ.

**問題3.**  $a$ を1以上の整数とする. 3次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^3$  内の曲面  $S$  のパラメータ表示を

$$\mathbf{p}(x, y) = \left( x, y, \sqrt{1 - x^{2a} - y^2} \right) \quad (x^{2a} + y^2 < 1)$$

とする. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $S$  の点  $\mathbf{p}(x, y)$  における第1基本量  $E, F, G$  を  $x, y$  を用いて表せ.
- (2)  $S$  の点  $\mathbf{p}(x, y)$  における単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を  $x, y$  を用いて表せ. ただし  $\mathbf{n}$  は  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y}$  と同じ向きとする.
- (3)  $S$  の点  $\mathbf{p}(x, y)$  における第2基本量  $L, M, N$  を  $x, y$  を用いて表せ.
- (4)  $S$  の点  $\mathbf{p}(x, y)$  におけるガウス曲率  $K$  を  $x, y$  を用いて表せ.
- (5) ガウス曲率  $K$  の最小値を求めよ.

問題 4. 連続関数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  を,

$$f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + \dots + |x_n|, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

で定め,  $X = f^{-1}(\{1\})$  とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $X$  は  $\mathbf{R}^n$  のコンパクト集合であることを示せ.
- (2)  $X$  は  $\mathbf{R}^n$  の連結集合であることを示せ.
- (3)  $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  とする.  $\mathbf{R}^n$  の部分空間  $S, X$  は同相であることを示せ.

問題5. 3次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^3$  内の閉領域  $D$  を

$$D = \left\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right\}$$

で定め、 $D$  の境界を  $S$  とする. さらに,

$$S_1 = S \cap \{(x, y, z) \mid z < 1\}, \quad S_2 = S \cap \{(x, y, z) \mid z > 1\}$$

とおく. また, ベクトル場  $\mathbf{F}$  を

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x(1 - z) + y, -x + y(1 - z), x - y + z(1 + z))$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1)  $D$  の体積を求めよ.

(2)  $S_1$  上の点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_1(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$  とする.  $\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y}$  を求めよ.

(3)  $dS_1 := \left| \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial y} \right| dx dy$  を  $S_1$  の面積素とし,  $\mathbf{n}_1$  は  $S_1$  上の単位法線ベクトルでその向きは  $D$  の外向きとする. このとき, ベクトル場  $\mathbf{F}$  の  $S_1$  上の面積分  $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1$  の値を求めよ.

(4)  $dS_2$  を  $S_2$  の面積素とし,  $\mathbf{n}_2$  は  $S_2$  上の単位法線ベクトルでその向きは  $D$  の外向きとする. このとき, ベクトル場  $\mathbf{F}$  の  $S_2$  上の面積分  $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2$  の値を求めよ.

問題 6.  $f(z) = \exp(iz^2)$  とする.  $R > 0$  に対し, 複素平面  $\mathbf{C}$  内の曲線  $C_{j,R}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , を

$$C_{1,R} : [0, R] \ni t \mapsto t \in \mathbf{C},$$

$$C_{2,R} : [0, \pi/4] \ni \theta \mapsto Re^{i\theta} \in \mathbf{C},$$

$$C_{3,R} : [0, R] \ni t \mapsto (R-t)e^{(\pi/4)i} \in \mathbf{C}$$

で定める.  $C_{j,R}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , にはパラメータ付けによる自然な向きを入れ, それらをつなげた曲線を  $C_R = C_{1,R} + C_{2,R} + C_{3,R}$  で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) 曲線  $C_R$  を図示せよ.

(2) 線積分  $\int_{C_R} f(z) dz$  の値を求めよ.

(3)  $0 \leq \theta \leq \pi/4$  に対し,  $\sin 2\theta \geq 4\theta/\pi$  が成り立つことを示せ.

(4)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_{2,R}} f(z) dz = 0$$

が成り立つことを示せ. ただし, 必要ならば (3) を用いてよい.

(5) 広義積分

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx, \quad \int_0^\infty \sin(x^2) dx$$

の値を求めよ. ただし, 必要ならば広義積分  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  の値が  $\sqrt{\pi}/2$  であることを証明なしに用いてよい.

問題 7.  $a > 0$  を正の定数とする. 次の連立常微分方程式に対する初期値問題

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = x(t) - y(t) - x(t)\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}, \\ \frac{dy}{dt}(t) = x(t) + y(t) - y(t)\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}, \\ x(0) = a, y(0) = 0 \end{cases}$$

を考える. また,  $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$  と  $\theta(t)$  を用いた変数変換

$$x(t) = r(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = r(t) \sin \theta(t)$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の等式を示せ.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta(t) & -r(t) \sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & r(t) \cos \theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dr}{dt}(t) \\ \frac{d\theta}{dt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t)(\cos \theta(t) - \sin \theta(t)) - r(t)^2 \cos \theta(t) \\ r(t)(\cos \theta(t) + \sin \theta(t)) - r(t)^2 \sin \theta(t) \end{bmatrix}$$

(2) 関数  $r(t)$  と  $\theta(t)$  が以下の連立常微分方程式を満たすことを示せ.

$$\frac{dr}{dt}(t) = r(t) - r(t)^2, \quad \frac{d\theta}{dt}(t) = 1.$$

(3) 初期値問題 (\*) の解  $(x(t), y(t))$  を求めよ.

**問題 8.**  $n \times m$  の実行列  $A$  に対して、交わりをもたない 2 つの集合  $L = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ ,  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  と

$$E = \{(\ell_i, r_j) \mid A \text{ の } (i, j) \text{ 成分が非零}\}$$

で定める二部グラフ  $G(A) = (L \cup R, E)$  を、 $A$  に対応する二部グラフという。また、二部グラフにおけるマッチングとは、以下の性質を満たす部分集合  $M \subseteq E$  である：任意の相異なる  $M$  の元  $e_1 = (\ell_{i_1}, r_{j_1}), e_2 = (\ell_{i_2}, r_{j_2})$  に対して  $i_1 \neq i_2$  と  $j_1 \neq j_2$  が成立する。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 行列  $A$  が

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であるとき、 $A$  に対応する二部グラフを図示せよ。

(2) (1) で求めた二部グラフにおいて、最大マッチング、すなわち、マッチング  $M$  のうち要素数  $|M|$  が最大のものを一つ図示し、 $M$  の要素数も書きなさい。

(3)  $\text{rank } A < \max\{|M| \mid M \text{ は } G(A) \text{ のマッチング}\}$  が成立する行列  $A$  を一つ挙げよ。ただし、 $\text{rank } A$  は行列  $A$  の階数を表す。

(4) 以下の不等式を示せ。

$$\text{rank } A \leq \max\{|M| \mid M \text{ は } G(A) \text{ のマッチング}\}.$$

問題9. 以下の問いに答えよ.

(1)  $n = 4^k$  ( $k$  は0以上の整数) に対して, 以下の関数  $f(n)$  を考える.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 4f(n/4) + n & (n > 1) \end{cases}$$

このとき  $f(n) = O(n \log n)$  であることを示せ. ここで  $O$  はランダウの記号 (オーダー記号) である.

(2) 配列  $a$  を, バブルソートを用いて昇順に並べ替えることを考える. ここで, 長さ  $n$  の配列  $a$  に対するバブルソートとは, 以下のようなソートアルゴリズムである.

1.  $j=0, \dots, n-2$  に対して 2. を実行する.
2.  $i=0, \dots, n-j-2$  に対して 3. を実行する.
3. もし  $a[i] > a[i+1]$  ならば  $a[i]$  と  $a[i+1]$  を入れ替える.

このとき以下の問いに答えよ.

- (a) 長さ  $n$  の配列に対するバブルソートにおいて, 完了するまでに入れ替えが最大で  $s(n)$  回生じるとき,  $n$  の関数としての  $s(n)$  をここではバブルソートの最悪計算量とよぶことにする. この  $s(n)$  をランダウの記号 (オーダー記号) を用いて表せ.
- (b) 以下のような長さ  $n = 10$  の配列  $a$  を考える.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a[i]	7	4	10	1	5	8	3	9	2	6

このとき, バブルソートが完了するまでに 3. で行われる入れ替えの総回数を求めよ.

2026年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科 数理科学専攻

入学試験（2025年8月26日）

英語（14:50 – 15:40）

- (1) 2題すべてに解答しなさい。
- (2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること。
- (3) すべての答案用紙に、氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること。
- (4) 試験終了後、答案用紙は2枚とも提出すること。問題用紙は各自持ち帰ること。

**問題 1.** 次の和文を英訳せよ。ただし、最後の出典は訳さなくてよい。

(1) 出典：Lang, *Undergraduate Algebra*, Second Edition より抜粋・一部改変

(2) 出典：Spivak, *Calculus*, Third Edition より抜粋・一部改変。

**問題 2.** 以下の英文を読み、枠で囲まれた I, II, III の部分を和訳せよ。

出典：G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications* より抜粋・一部改変。

## 出題意図

第1次試験（筆記）では数理科学における基礎的な学力を有しているかを見る。

- **数学 I**では、微分積分、線形代数（行列、線形写像、ベクトル空間）の基礎的内容が出題されている。試験問題は論述式であり、最終的な答の正否のみでなく答に至る過程の記述も採点の対象となる。

問1 線形代数に関する基礎的知識を問う。

問2 線形代数に関する基礎的知識を問う。

問3 微分積分に関する基礎的知識を問う。

問4 微分積分に関する基礎的知識を問う。

- **数学 II**では、代数、幾何、解析、応用数理の4つの領域に対して、基本的内容が選択式で出題されている。試験問題は論述式であり、最終的な答の正否のみでなく答に至る過程の記述が採点の対象となる。

問1 線形代数の標準形あるいは計量ベクトル空間に関する基本的知識を問う。

問2 群論・環論の初歩に関する基本的知識を問う。

問3 曲面・曲線の微分幾何に関する基本的知識を問う。

問4 位相空間論に関する基本的知識を問う。

問5 ベクトル解析に関する基本的知識を問う。

問6 複素関数論に関する基本的知識を問う。

問7 微分方程式論に関する基本的知識を問う。

問8 離散数学に関する基本的知識を問う。

問9 アルゴリズムに関する基本的知識を問う。

- **英語**では、英語で数学に関する文章を正しく読み書きできるかという基礎的能力を見る。

問1 数学に関する英作文（和文英訳を含む）の基礎的能力を問う。

問2 数学に関する英文和訳の基礎的能力を問う。