2025年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2025年2月4日）

数学 I (9:30 – 11:30)

(1) 線形代数，微分積分 計4題を解答しなさい．

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

(3) すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

(4) 試験終了後，答案用紙は4枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１．　a, b を実数とする．写像 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^4$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a(x^2+x+2y-z)-x^2\\ 2x+3y-3z\\ x+6y+(2b+5)z\\ 3x+8y+bz\end{bmatrix}\qquad \left(\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^3\right)$$

で定義する．f が線形写像であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．また，$\mathbf{R}^3$ の標準基底と $\mathbf{R}^4$ の標準基底に関する f の表現行列 A を求めよ．なお，A を表すために b を用いてよい．

(2) f が単射であるための b に関する必要十分条件を求めよ．

(3) f の核を V とおき，$\begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$ で張られる空間を W とおく．
$V+W=\mathbf{R}^3$ が成り立つような b は存在するか？存在するならそのような b を求め，存在しないならその理由を述べよ．

問題２．　a, b, c を実数とする．行列

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 3\\ -1 & a & b & c\end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の固有値が -1（重複度 2），$1, 2$ であるとき，以下の問いに答えよ．

　(i) b, c の値を求めよ．

　(ii) A が対角化可能であるための a に関する必要十分条件を求めよ．また，a がその条件を満たすとき，固有値 -1 に対する A の固有空間 V_{-1} の基底を求めよ．

　(iii) a は (ii) の条件を満たすとする．このとき，A の最小多項式 $m(x)$ を求めよ．また，A の余因子行列 $\widetilde{A}$ に対し，$\widetilde{A}=\alpha A^2+\beta A+\gamma E$ を満たす実数の組 (α,β,γ) を一つ求めよ．ただし，E は 4 次単位行列である．

問題３．　以下の問いに答えよ．

(1) α を実数とする．広義積分

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^\alpha \, dx$$

は，$\alpha > -1$ ならば収束し，$\alpha \leq -1$ ならば発散することを示せ．

(2) 帯状領域 D を $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -\infty < x < \infty,\ 0 < y < 1\}$ で定義する．このとき，広義積分

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2 + y^2)^\beta}$$

が収束するような実数 β の範囲を求めよ．

問題４．　べき級数

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots + \frac{x^k}{(2k)!} + \cdots$$

に対し，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の実数 x に対し $f(x)$ は収束することを示せ．

以下では $f(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値関数と考える．

(2) $f(-\pi^2)$ を求めよ．

(3) 正の整数 n に対し，$\mathbf{R}$ 上の関数 $g_n(x)$ を

$$g_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}} \frac{d}{dx} \log f(nx^2)$$

で定める．$\displaystyle\lim_{n \to \infty} g_n(x)$ を求めよ．

(4) (3) で定めた関数列 $\{g_n(x)\}$ は $\mathbf{R}$ 上で一様収束するかどうか判定せよ．

2025年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2025年2月4日）

英語 (11:50 – 12:40)

(1) 2題すべてに解答しなさい．

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

(3) すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

(4) 試験終了後，答案用紙は2枚とも提出すること．問題用紙は各自持ち帰ること．

問題１．　次の和文を英訳せよ.

問題２．　次の英文を和訳せよ．ただし，最後の出典は訳さなくてよい.

以上は，Paul R. Halmos, Finite-Dimensional Vector Spaces, UTM, Springer-Verlag New York Inc. 1958. pp.3–4 等から一部改変.

出題意図

第 1 次試験（筆記）では数理科学における基礎的な学力を有しているかを見る．

- **数学 I** では，微分積分，線形代数（行列，線形写像，ベクトル空間）の基礎的内容が出題されている．試験問題は論述式であり，最終的な答の正否のみでなく答に至る過程の記述も採点の対象となる．

  問 1　線形代数に関する基礎的知識を問う．

  問 2　線形代数に関する基礎的知識を問う．

  問 3　微分積分に関する基礎的知識を問う．

  問 4　微分積分に関する基礎的知識を問う．

- **英語**では，英語で数学に関する文章を正しく読み書きできるかという基礎的能力を見る．

  問 1　数学に関する英作文（和文英訳を含む）の基礎的能力を問う．

  問 2　数学に関する英文和訳の基礎的能力を問う．