

2025 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科 数理科学専攻

入学試験（2024 年 8 月 27 日）

数学 I (9:30 – 11:30)

- (1) 線形代数，微分積分 計 4 題を解答しなさい。
- (2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること。
- (3) すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること。
- (4) 試験終了後，答案用紙は 4 枚とも提出すること。問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること。

問題 1. c_1, c_2 を実数とし, ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 1 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 4 次正方行列 $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{b}]$ の行列式を求めよ.
- (2) 4×3 行列 $[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]$ を A とおき, $c_1 = 6$ とする. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ が存在するとき, c_2 の値と $\mathbf{x}$ を求めよ.
- (3) (2) の c_1, c_2 に対し, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ で張られる空間を V_1 とし, $\mathbf{a}_3, \mathbf{b}$ で張られる空間を V_2 とする. このとき $V_1 \cap V_2$ の次元と基底を求めよ.

問題 2. 行列 A とベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を次のように定める.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

線形写像 $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ を, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ に対し $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定める. また $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ で張られる空間を V とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) f の核 $\ker f$ の次元を求めよ.
- (2) f による V の像 $f(V)$ は V に含まれることを示せ.
- (3) 線形写像 $g: V \rightarrow V$ を, $\mathbf{x} \in V$ に対し $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定める. $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ とおく. V の基底 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ に関する g の表現行列 B を求めよ.
- (4) A は対角化可能であるか判定し, 対角化可能なら $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P とそのときの $P^{-1}AP$ を求めよ.

問題 3. $\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) f の極値を求めよ.
- (2) f の最大値が存在することを示し、最大値を求めよ.
- (3) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy$$

問題 4. 区間 I を $I = [0, +\infty)$ とし、正の整数 n に対して I 上の関数 $f_n : I \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f_n(x) = \sqrt{x} n e^{-n^6 x^4}$$

で定義する. このとき、以下の問いに答えよ.

- (1) 関数 $g(x) = x e^{-x^2}$ が I 上で有界であることを示せ.
- (2) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I 上で各点収束することを示せ.
- (3) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I 上で一様収束しないことを示せ.

2025 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科 数理科学専攻

入学試験（2024 年 8 月 27 日）

数学 II（13:00 – 14:30）

- (1) 問題は全部で 9 題ある．そのうちの 2 題を選択して解答しなさい．
- (2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること．
- (3) すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．
- (4) 試験終了後，答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題 1. a を実数とし,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & a & 2 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) A の固有多項式を求めよ.
- (2) A のジョルダン細胞の個数が最小になる a の値に対し, A のジョルダン標準形 J と $J = P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P を求めよ.

問題 2. 本問では、環は全て可換環とし、積に関する単位元 1 を持つものとする。環 R の元 $a_1, \dots, a_n$ が生成する R のイデアルを $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) I, J を環 R の異なるイデアルとする。

(i) $IJ \subset I \cap J$ を示せ。

(ii) $I + J = R$ ならば、 $IJ = I \cap J$ が成立することを示せ。

(iii) I または J が R の極大イデアルならば、 $IJ = I \cap J$ が成立することを示せ。

(2) $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ のイデアル

$$\langle x, y \rangle \cap \langle x^2 + y^2 - 1, x + y - 1 \rangle$$

の生成元を一組求めよ。

問題 3. 3次元空間 $\mathbf{R}^3$ 内の曲面 S のパラメータ表示を

$$\mathbf{p}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right), \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2$$

とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) S の点 $\mathbf{p}(u, v)$ における u, v に関する第 1 基本量 E, F, G を求めよ.
- (2) $i = 1, 2$ に対して, 平面内の C^∞ 級曲線 $c_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $c_i(t) = (u_i(t), v_i(t))$ とし, さらに, 空間内の C^∞ 級曲線 $\gamma_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ を $\gamma_i(t) = \mathbf{p}(u_i(t), v_i(t))$ と定める. $c_1(0) = c_2(0)$ のとき, 接ベクトル $\frac{dc_1}{dt}(0)$ と $\frac{dc_2}{dt}(0)$ のなす角度と, 接ベクトル $\frac{d\gamma_1}{dt}(0)$ と $\frac{d\gamma_2}{dt}(0)$ のなす角度が等しいことを示せ. ただし, $\frac{dc_1}{dt}(0)$ と $\frac{dc_2}{dt}(0)$ は零ベクトルでないとする.
- (3) $\theta \in \mathbf{R}$ とする. 空間曲線 $\gamma(t) = \mathbf{p}(t \cos \theta, t \sin \theta)$ ($t \in \mathbf{R}$) の $-1 \leq t \leq 1$ の部分の長さを求めよ.

問題 4. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする. $i = 1, 2$ に対し, $d_i : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$d_i((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \{d_X(x_1, x_2)^i + d_Y(y_1, y_2)^i\}^{1/i}, \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) d_1, d_2 はそれぞれ $X \times Y$ 上の距離関数となることを示せ.
- (2) d_1, d_2 が定める $X \times Y$ の位相をそれぞれ $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ とするとき, $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ となることを示せ.
- (3) (2) の位相は, $X \times Y$ の直積位相 $\mathcal{O}$ と一致することを示せ.

問題 5. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{R}^3$ 上の C^2 級スカラー場 f に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$$

- (2) $\mathbf{R}^3$ 上の C^1 級ベクトル場 $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$$

- (3) r を正の実数, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ とし,

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid f(x, y, z) \leq r\}$$

とする. $\mathbf{F}$ が $\mathbf{R}^3$ 上の C^1 級ベクトル場であるとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\iiint_D (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} f) \, dx \, dy \, dz = 0$$

問題 6. $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ とする.

正の整数 N に対して複素平面上の曲線 C_1, C_2, C_3, C_4 を

$$\begin{aligned} C_1 : z(t) &= t - \frac{i}{2} & \left(-N - \frac{1}{2} \leq t \leq N + \frac{1}{2} \right) \\ C_2 : z(t) &= N + \frac{1}{2} + ti & \left(-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \right) \\ C_3 : z(t) &= -t + \frac{i}{2} & \left(-N - \frac{1}{2} \leq t \leq N + \frac{1}{2} \right) \\ C_4 : z(t) &= -N - \frac{1}{2} - ti & \left(-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

で定める. C_1, C_2, C_3, C_4 には上記のパラメータ付けによる自然な向きを定め, それらをつなげた曲線を $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1)

$$\sum_{n=-N}^N f(n) = \int_C \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz$$

が成り立つことを示せ.

(2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_2} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz} - 1} dz = 0$$

が成り立つことを示せ.

(3) C_1 上で等式

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi i(n+1)z} \quad (*)$$

が成り立つことと, C_3 上で等式

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi inz} \quad (**)$$

が成り立つことを利用して, 無限級数の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

を求めよ. ただし (*), (**) を証明する必要はない.

問題 7. ν を整数でない実数とする. 常微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2\nu y = 0 \quad (*)$$

に関して, 以下の問いに答えよ.

(1) べき級数の収束半径の定義を述べよ.

(2) べき級数 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は 0 でない収束半径 ρ をもち $(*)$ の解であるとする. このとき, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は漸化式

$$a_{n+2} = \frac{2(n-\nu)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たすことを示せ.

(3) (2) におけるべき級数 $y(x)$ で $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dx}(0) = 0$ を満たすものを $\varphi(x)$ とする.

このとき, $\varphi(x)$ の具体的な表示式を求め, $\rho = +\infty$ となることを示せ.

(4) (2) におけるべき級数 $y(x)$ で $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dx}(0) = 1$ を満たすものを $\psi(x)$ とする.

このとき, $\psi(x)$ の具体的な表示式を求め, $\rho = +\infty$ となることを示せ.

(5) y_0, y_1 を任意の実数とする. 初期条件

$$y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = y_1$$

のもとで $(*)$ は $x = 0$ のある近傍において, ただ 1 つの解 $y(x)$ をもつ. $y(x)$ は $x = 0$ で実解析的であることを証明せよ.

問題 8. 正の整数 n を 1 と 2 のみの和として表し、表し方の総数を $f(n)$ とする.
ただし 1 と 2 を並べる順序を区別する. 例えば

$$1 = 1, \quad 2 = 2 = 1 + 1, \quad 3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$$

から $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ である. 以下の問いに答えよ.

- (1) 数列 $\{f(n)\}$ の満たす漸化式を 1 つ導出せよ.
- (2) 実数 a に対し, a 以下の最大の整数を $\lfloor a \rfloor$ で表す.

$$f(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

が成り立つことを示せ.

問題 9. 2つの n 次正方行列 $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ の順序対 (A, B) を入力とし, n 次正方行列 $C = [c_{i,j}]$ を出力するアルゴリズム P を以下のように定める. ただし n は正の整数で, 行列 A, B の成分は非負整数とする.

- 1: 初期値として各 $i, j \in \{1, \dots, n\}$ に対し $c_{i,j} = 0$ とおく.
- 2: 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して (i の小さい順に) 以下を行う.

各 $k \in \{1, \dots, n\}$ に対して (k の小さい順に) 以下を行う.

((i, k) に依存した操作, ここから)

$a_{i,k} = 0$ の場合は何もしない.

$a_{i,k} > 0$ の場合は各 $\ell \in \{1, \dots, n\}$ に対して (ℓ の小さい順に) 以下を行う.

$b_{k,\ell} \leq c_{i,\ell}$ の場合は何もしない.

$b_{k,\ell} > c_{i,\ell}$ の場合は $c_{i,\ell} = b_{k,\ell}$ とする (右辺の値を左辺に代入する).

((i, k) に依存した操作, ここまで)

- 3: 行列 $C = [c_{i,j}]$ を出力する.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $n = 3$ の場合を考える. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき, 行列とし

ての積 AB を計算せよ. さらに, 入力 (A, B) に対してアルゴリズム P が出力する行列 C を求めよ.

- (2) あらためて n が一般の場合を考える. 行列としての積 AB を $[d_{i,j}]$ とする. また, 入力 (A, B) に対してアルゴリズム P が出力する行列を $C = [c_{i,j}]$ とする. このとき $d_{i,j} = 0$ となるどの $i, j \in \{1, \dots, n\}$ に対しても, 出力される $c_{i,j}$ の値が 0 であることを示せ.

- (3) (2) と同じ仮定の下で, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ に対し, 出力された $c_{i,j}$ の値が 0 ならば, $d_{i,j} = 0$ が成り立つことを示せ.