2024年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2023年8月29日）

数学 I (9:30 – 11:30)

(1) 線形代数，微分積分 計4題を解答しなさい．

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

(3) すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

(4) 試験終了後，答案用紙は4枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１．　区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)=\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{x^2}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 区間 $(0,\infty)$ において $f'(x)<0$ であることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$ を求めよ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ の収束・発散を判定せよ.

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ の収束・発散を判定せよ.

問題２．　以下の問いに答えよ.

(1) xyz 空間内の曲面 $x^2+y^2-z^2=4$ の点 $(1,2,-1)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 次の 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x^4+y^2)\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\le 1\}$$

(3) 次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_E \left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right) dxdydz, \qquad E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\le 1\right\}$$

問題３． $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ とおき，線形写像 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．また，

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

で張られる $\mathbb{R}^3$ の部分空間を V とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 3 次正方行列 $B = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]$ が正則行列であるか判定せよ．

(2) $\boldsymbol{b}_1$ が F の像 $\mathrm{Im}\, F$ に属するか判定せよ．

(3) $F^{-1}(V) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid F(\boldsymbol{x}) \in V\}$ は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ．

(4) $F^{-1}(V)$ の次元を求めよ．

問題４． a を実数とし，

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & -2 \\ -4+4a & a & -3+3a & 2-2a \\ -8 & -2 & -5 & 4 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有多項式を求めよ．

(2) A が対角化可能であるための a に関する必要十分条件を求めよ．

(3) a が (2) で求めた条件を満たすとき，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．

2024 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2023 年 8 月 29 日）

数学 II (13:00 – 14:30)

(1) 問題は全部で 9 題ある．そのうちの 2 題を選択して解答しなさい．

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

(3) すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

(4) 試験終了後，答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１．　$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は相異なる複素数とし，

$$f(x) = (x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_2)^2 (x - \alpha_3)^2$$

とおく．A は n 次複素正方行列 $(n \geq 5)$ で，A の最小多項式 $m_A(x)$ は 5 次以上とする．A が $f(A) = (A - \alpha_1 E)^2 (A - \alpha_2 E)^2 (A - \alpha_3 E)^2 = O$ を満たすとき，以下の問いに答えよ．ただし，E は単位行列，O は零行列とする．

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は A の固有値であることを示せ．

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対し，$(A - \alpha_2 E)^2 (A - \alpha_3 E)^2 \boldsymbol{x}$ は，A の固有値 α_1 に関する広義固有空間（一般固有空間）に含まれることを示せ．

(3) A が 6 次複素正方行列で，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^6$ に対し，$(A - \alpha_2 E)^2 (A - \alpha_3 E)^2 \boldsymbol{x}$ が A の固有値 α_1 に関する固有空間に含まれるとする．このとき，A のジョルダン標準形にどのようなものがあるか，すべての可能性を列挙せよ．ただし，ジョルダン細胞を並べる順序の違いは無視してよい．

問題２．　A は（積に関する）単位元 1 を持つ可換環とし，$e \in A$ は $e \neq 0, e \neq 1, e^2 = e$ を満たすとする．写像 $\varphi : A \to eA$ を $\varphi(x) = ex \ (x \in A)$ で定義する．ただし，$eA = \{ex \mid x \in A\}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $1 - e$ は A の零因子であることを示せ．

(2) A の和と積に関して，eA は e を（積に関する）単位元とする可換環であることを示せ．

(3) 以下の (a), (b) を示せ．ただし，eA は (2) のようにして環と考える．

　(a) 写像 φ は環準同型である．

　(b) φ の核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ は A の単項イデアルである．

問題３．　xyz 空間内の曲線 C を

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos u \\ \sin u \\ u\end{pmatrix} \qquad (u \in \mathbb{R})$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の単位接ベクトル $\boldsymbol{e}_1$, 単位主法線ベクトル $\boldsymbol{e}_2$, および単位従法線ベクトル $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ求めよ．

(2) 実数 $0 < r < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を固定する．実変数 $u, v \in \mathbb{R}$ を動かしたとき，

$$\boldsymbol{p}(u, v) = \gamma(u) + (r\cos v)\boldsymbol{e}_2 + (r\sin v)\boldsymbol{e}_3$$

という点全体が成す曲面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ の向きは $\left(-\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}\right) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}$ の向きと同じとする．また，$\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は (1) のように定める．

(3) (2) で定めた曲面 S のガウス曲率 K を求めよ．

問題４．　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ について，$f(x_1) = f(x_2)$ となるとき x_1 と x_2 は同値であると定義する．また，この同値関係による 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の商空間を X とし，$\mathbb{R}$ から X への射影を $\pi : \mathbb{R} \to X$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ の任意の部分集合 U に対して，$\pi^{-1}(\pi(f^{-1}(U))) = f^{-1}(U)$ であることを示せ．

(2) X はハウスドルフ空間であることを示せ．

(3) f が最大値と最小値を持つとき，X はコンパクトな位相空間であることを示せ．

問題５．　D を C^1 級の境界 ∂D をもつ $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし，f, g を D の閉包 $\overline{D}$ 上の実数値 C^2 級関数とする．$\boldsymbol{n}$ を ∂D 上の外向き単位法ベクトル場とする．このとき，次の等式 (1) と (2) が成り立つことを示せ．ただし，線積分の向きは ∂D が D を左手に見る向きとする．また，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}, \dfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}$ は法線微分を表す.

(1) $\displaystyle\iint_D (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dxdy = \int_{\partial D} f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\, ds$

(2) $\displaystyle\iint_D (f\Delta g - g\Delta f)\, dxdy = \int_{\partial D} \left(f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} \right) ds$

問題６．　以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z) = \dfrac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^4 + 4z^3 + z^2}$ に対し，以下の (a), (b) に答えよ.

(a) $f(z)$ の極をすべて求めよ.

(b) (a) で求めた極のうち，単位円 $C : |z| = 1$ の内部の極における $f(z)$ の留数を求めよ.

(2) $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とおくとき，$\dfrac{\sin^2\theta}{2 + \cos\theta}$ を z の有理式で表せ.

(3) 留数定理を用いて，$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{2 + \cos\theta}\, d\theta$ の値を求めよ.

問題 7．　$q(t)$ を $[0,+\infty)$ 上の実数値連続関数とし，連立常微分方程式

$$x'(t) = y(t) + q(t)x(t), \quad y'(t) = -x(t) + q(t)y(t) \qquad (t \geq 0)$$

の解 $x(t)$, $y(t)$ を考える．

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $X(t)$, $Y(t)$ の満たす 1 階の微分方程式を求めよ．

(2) 初期値を $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ とし，$q(t) = e^{-t}$ としたときの $X(t)$ および $Y(t)$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} X(t)$ および $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} Y(t)$ を求めよ．

(3) 初期値を $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ とし，$q(t) = e^{-t}$ としたとき，

$$|x(t) - (\alpha\cos t + \beta\sin t)| \to 0 \qquad (t \to +\infty)$$

となる定数 α と β を求めよ．

問題 8．　本問ではグラフは全て単純無向グラフとする．すなわち，辺に向きは定めず，ループ（端点が同じ頂点となる辺）はなく，多重辺（複数の辺で同じ端点集合をもつもの）もないとする．グラフの頂点 v に対して，v に接続する辺の個数を v の次数といい，$d(v)$ で表す．n 個の頂点を持つグラフ G の頂点集合が $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ であり，$d(v_1) \geq d(v_2) \geq \cdots \geq d(v_n)$ であるとき，非負整数の列 $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ を G の次数列という．以下の問いに答えよ．

(1) 次数列が $(4,4,3,3,2,2)$ となるグラフを一つ図示せよ．

(2) 次数列が $(6,5,4,3,3,3)$ となるグラフは存在しないことを示せ．

(3) n を 2 以上の整数とする．グラフ G の次数列が $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ であるとする．このとき，ある $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ が存在して $d_i = d_{i+1}$ が成り立つことを示せ．

問題９．　任意のビット列 B（0 と 1 の列）を入力とし，次の操作を B に施すアルゴリズムを考える：

「B に現れるビット 0 を 1 に置き換え，B に現れるビット 1 を 10 に置き換える」

上記のアルゴリズムで，ビット列 B を入力として得られる出力ビット列を $T(B)$ とする．n が非負整数のとき，B に T を n 回適用した結果を $T^n(B)$ と表す．ただし，$T^0(B) = B$ とする．例えば，$T(0) = 1$, $T(01) = 110$, $T^2(0) = 10$, $T^2(01) = 10101$ である．

$B_n = T^n(1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおくとき，以下の問いに答えよ．ただし，(1), (2), (3) において n は非負整数とする．

(1) B_{n+2}, B_{n+1}, B_n の間の関係を求めよ．

(2) ビット列 B_n の長さ b_n を求めよ．

(3) B_n の中で “01” の配置が現れる回数を c_n とするとき，c_n を求めよ．