2023年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2022年8月23日）

数学 I (9:30 − 11:30)

(1) 線形代数, 微分積分 計4題を解答しなさい.

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

(3) すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

(4) 試験終了後, 答案用紙は4枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． α を正の実数，$f_\alpha(x) = x(1+\log x)^\alpha$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f_\alpha(x)$ は区間 $[\,1,\,\infty)$ で単調増加であることを示せ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1}{f_\alpha(x)}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{f_\alpha(x)}\,dx$ の収束・発散を判定し，収束するときはその値を求めよ．

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_\alpha(n)}$ の収束・発散を判定せよ．

問題２． 以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を次で定義する．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\tan^{-1}(y-1) - 2y|y|\tan^{-1}(x+\sqrt{3})}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ここで $\tan^{-1}$ は関数 $\tan : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ の逆関数を表すものとする．

(a) $f(x,y)$ が点 $(0,0)$ で連続かどうかを判定せよ．

(b) $f(x,y)$ が点 $(0,0)$ で x, y について偏微分可能かどうかを判定し，偏微分可能な場合には偏微分係数を求めよ．

(2) m, n を正の整数とするとき，次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D \sin(mx+ny)\,dxdy \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x \geq 0, y \geq 0\,, mx+ny \leq \pi\right\}$$

(3) 空間 $\mathbb{R}^3$ の集合

$$G = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\} \cap \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 3\right\}$$

の体積を求めよ．

問題３． 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求め，各固有値に対する固有空間の次元と一組の基底を求めよ．

(2) A の最小多項式を求めよ．

(3) A は対角化可能であるか判定し，対角化可能なら $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P と，$P^{-1}AP$ を求めよ．

問題４． 以下の問いに答えよ．

(1) V_1 と V_2 を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間，$f : V_1 \to V_2$ と $g : V_1 \to V_2$ を線形写像とする．このとき，$W = \left\{ f(\boldsymbol{x}) - \dfrac{1}{2}g(\boldsymbol{y}) \;\middle|\; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_1 \right\}$ が V_2 の部分空間であることを示せ．

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -8 \\ -4 & -10 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ t \end{bmatrix}$$

とおく．ただし，$t \in \mathbb{R}$ とする．線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ と $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

で定義し，$\boldsymbol{v}$ が $W = \left\{ f(\boldsymbol{x}) - \dfrac{1}{2}g(\boldsymbol{y}) \;\middle|\; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \right\}$ に属すると仮定する．

(a) t の値を求めよ．

(b) W の一組の基底と W の次元を求めよ．

2023年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2022年8月23日）

数学 II (13:00 – 14:30)

(1) 問題は全部で9題ある．そのうちの2題を選択して解答しなさい.

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

(3) すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

(4) 試験終了後, 答案用紙は2枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１．　c を複素数，

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 & -4 \\ c+1 & 9 & -2c-2 & -9 \\ -2 & 3 & 3 & -3 \\ c-1 & 10 & -2c+1 & -10 \end{bmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．必要があれば c の値によって場合分けすること．

(1) A の固有多項式と最小多項式を求めよ．

(2) A のジョルダン標準形 J を求めよ．また，A の階数が 3 のとき，$J = P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P を求めよ．

問題２．　本問において環は全て可換環であり，積に関する単位元を持つものとする．さらに，環 R, S に対し，環準同型 $f : R \to S$ は「R の積の単位元を S の積の単位元に写す」という条件も満たすとする．以下の各問いに答えよ．

(1) 環 R のイデアル I が R の素イデアルであるということの定義を述べよ．また，環 R のイデアル I が R の極大イデアルであるということの定義を述べよ．

(2) R, S を環とし，$f : R \to S$ を環準同型とする．S のイデアル I に対し，

$$f^{-1}(I) := \{a \in R \mid f(a) \in I\}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) f が全射であるとき，次の主張 (A) を示せ：
(A) I が S の素イデアルならば，$f^{-1}(I)$ は R の素イデアルである．

(b) f が全射であるとき，次の主張 (B) を示せ：
(B) I が S の極大イデアルならば，$f^{-1}(I)$ は R の極大イデアルである．

(c) $R = \mathbb{Z}[x]$ を $\mathbb{Z}$ 上の１変数多項式環，$S = \mathbb{Q}[x]$ を $\mathbb{Q}$ 上の１変数多項式環とし，f は包含写像とする．このとき，主張 (A), (B) が正しいかどうかそれぞれ答えよ．正しい場合は証明し，正しくない場合は反例をあげよ．

問題3． 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S のパラメータ表示を

$$\boldsymbol{p}(x,y)=\left(x,y,\log\frac{\cos x}{\cos y}\right)\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) S の点 $\boldsymbol{p}(x,y)$ における第1基本量 E,F,G を x,y を用いて表せ．

(2) S の点 $\boldsymbol{p}(x,y)$ における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を x,y を用いて表せ．ただし $\boldsymbol{n}$ は $\dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial y}$ と同じ向きとする．

(3) S の点 $\boldsymbol{p}(x,y)$ における第2基本量 L,M,N を x,y を用いて表せ．

(4) S の点 $\boldsymbol{p}(x,y)$ におけるガウス曲率 K と平均曲率 H を x,y を用いて表せ．

問題4． 以下の問いに答えよ．

(1) $(X,\mathcal{O}_X)$ を位相空間とする．ただし，$\mathcal{O}_X$ は集合 X の位相とする．$\sim_\sigma$ を X 上の同値関係とし，$\sim_\sigma$ による商集合 X/σ への射影を $\pi_\sigma:X\longrightarrow X/\sigma$ と表す．このとき，X/σ の部分集合族 $\mathcal{O}_{X/\sigma}$ を

$$\mathcal{O}_{X/\sigma}=\{U\mid U\subset X/\sigma,\pi_\sigma^{-1}(U)\in\mathcal{O}_X\}$$

によって定めると，$\mathcal{O}_{X/\sigma}$ は X/σ の位相になることを示せ．

(2) $(X,\mathcal{O}_X)$ と $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$\sim_\sigma$ は X 上の同値関係であり，$\sim_\rho$ は Y 上の同値関係であるとする．ただし，$\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ はそれぞれ X, Y の位相とし，商集合 X/σ と Y/ρ にはそれぞれ (1) で定めた $\mathcal{O}_{X/\sigma}$ と $\mathcal{O}_{Y/\rho}$ によって位相を定める．

写像 $f:X\longrightarrow Y$ は，

$$x,x'\in X\text{ について, }x\sim_\sigma x'\text{ ならば }f(x)\sim_\rho f(x')$$

を満たすとする．$x\in X$ を代表元とする X/σ の元 $[x]_\sigma$ に対し，$f(x)\in Y$ を代表元とする Y/ρ の元 $[f(x)]_\rho$ を対応させる写像を $\widetilde{f}:X/\sigma\longrightarrow Y/\rho$ とする．このとき，f が連続ならば $\widetilde{f}$ も連続であることを示せ．

問題５．　xyz 空間の曲線 C_1, C_2, C_3 を

$$C_1 : [0,1] \ni t \mapsto (t, 0, 0) \in \mathbb{R}^3,$$

$$C_2 : [0,1] \ni t \mapsto (1, t, 0) \in \mathbb{R}^3,$$

$$C_3 : [0,1] \ni t \mapsto (1-t, 1-t, 0) \in \mathbb{R}^3$$

で定める．C_1, C_2, C_3 に上記のパラメータ付けによる自然な向きを入れ，それらをつなげた曲線を

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

とおく．$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\mathbf{F}$ を

$$\mathbf{F}(x, y, z) = {}^t(\sinh x \sin y + y^2, \cosh x \cos y + x^3, 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) 回転 $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ を求めよ．

(2) 線積分 $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ の値を求めよ．

問題６．　$a,\, b,\, c$ は $a>0,\, c>0,\, b^2<4ac$ をみたす実数とする．複素関数 $f(z)$ を

$$f(z)=\frac{z}{(az^2+bz+c)^2}$$

と定める．また，$R>0$ とし，曲線 $C_{j,R}$ $(j=1,2)$ を

$$C_{1,R}:[-R,R]\ni x\longmapsto x\in\mathbb{C}$$
$$C_{2,R}:[0,\pi]\ni \theta\longmapsto Re^{i\theta}\in\mathbb{C}$$

で定める．$C_{1,R},\, C_{2,R}$ に上記のパラメータ付けによる自然な向きを入れ，それらをつなげた曲線を $C_R=C_{1,R}+C_{2,R}$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $0<R<\sqrt{\dfrac{c}{a}}$ をみたす実数 R に対し，線積分 $\displaystyle\int_{C_R} f(z)dz$ の値を求めよ．

(2) $\sqrt{\dfrac{c}{a}}<R$ をみたす実数 R に対し，線積分 $\displaystyle\int_{C_R} f(z)dz$ の値を求めよ．

(3) 等式

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_{2,R}} f(z)dz=0$$

が成り立つことを示せ．

(4) 広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(ax^2+bx+c)^2}dx$$

の値を求めよ．

問題７．　次の初期値問題を考える．

$$y'(x)=y(x)-(1+\cos x)y(x)^2,\quad y(0)=\frac{1}{2}.$$

以下の問いに答えよ．

(1) $u(x)=y(x)^{-1}$ として，$u(x)$ が満たすべき微分方程式を求めよ．

(2) 上記の初期値問題の解 $y(x)$ を求めよ．

問題８．　本問ではグラフは全て無向グラフとする．以下の問いに答えよ．

(1) グラフ G は，頂点数が 5 の木であるとする．G の隣接行列 A が次に示した行列であるとき，a, b, c, d の値を理由とともに答えよ．ただし，G の頂点集合は $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ であるとし，頂点 i は A の第 i 行と第 i 列に対応するものとする．

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a & d \\ 0 & 0 & 1 & d & a \end{bmatrix}$$

(2) (1) のグラフ G の各頂点に，赤・青・白・黒のどれかの色を一つずつ付ける．ただし，辺で隣接する 2 頂点には異なる色を付けるものとする．

このとき，どの色も少なくとも一つの頂点に付く色付けは全部で何通りあるか，理由とともに答えよ．

(3) グラフ T は，頂点数が 8 の木であるとする．T の各頂点に，赤・青・白・黒のどれかの色を一つずつ付ける．ただし，辺で隣接する 2 頂点には異なる色を付けるものとする．このとき，T の異なる 2 つの辺 e, e' で，次の条件を満たすものが必ず存在することを示せ：e の両端の頂点に付いた色の組合わせと，e' の両端の頂点に付いた色の組合わせが等しい．

問題９．　スイッチ A と B がある．どちらも初期設定ではオフであり，１回押すたびにオンとオフが入れ替わる．また，一方のスイッチがオン・オフどちらであるかは，もう一方のスイッチのオン・オフに影響を与えない．いま二文字からなるアルファベット $\Sigma = \{a, b\}$ を固定し，Σ 上の語が与えられたとき，それを左から読んでスイッチを押す指示とみなす．ただし，a はスイッチ A に対応し，b はスイッチ B に対応する．たとえば初期設定から開始して語 abb の指示に従うと A，B，B の順にスイッチを押すことになり，abb が指示する操作を完了した直後はスイッチ A がオン，スイッチ B がオフになる．以下の問いに答えよ．

(1) 有限オートマトン（決定性有限オートマトン）の定義を述べよ．

(2) アルファベット Σ 上の言語 L を以下のように定める．

$L = \{w \in \{a, b\}^* |$ 初期設定から開始して語 w の指示する操作を完了した直後に，A と B の少なくとも一方はオフになる.$\}$

言語 L を受理する（受理する言語が L と一致するということ）有限オートマトンを状態遷移図によって示せ．初期状態にはどこからともなく入ってくる矢印を付けて示し，受理状態は二重丸で囲って示すこと．その有限オートマトンが L を受理することの証明は書かなくてよい．

(3) 命題「A がオンになっている」,「B がオンになっている」をそれぞれ α, β で表す．いま α, β に $\neg$（否定），$\wedge$（かつ），$\vee$（または）を有限回（0 回も可）適用して構成される命題を「スイッチ A，B についての命題」と呼ぼう（たとえば $(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$）．このとき

スイッチ A，B についての任意の命題 γ に対して，有限オートマトン M が存在し（M は γ に依存してよい），M は以下の言語 L_γ を受理する．

$L_\gamma = \{w \in \{a, b\}^* |$ 初期設定から開始して語 w の指示する操作を完了した直後に，命題 γ が成り立つ.$\}$

という主張は成り立つか，簡潔な理由とともに答えよ．