2024 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2024 年 2 月 7 日）

数学 I (9:30 − 11:30)

(1) 線形代数，微分積分 計 4 題を解答しなさい．

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

(3) すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

(4) 試験終了後，答案用紙は 4 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１.　区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)=\dfrac{2x\log x}{1+x^4}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 区間 $[1,\infty)$ において $f(x)\le\dfrac{2}{x^2}$ であることを示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ の収束・発散を判定せよ.

(3) $y=\dfrac{1}{x}$ とおくとき，$f(x)=f(y)\dfrac{dy}{dx}$ が成り立つことを示せ.

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の収束・発散を判定せよ.

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の収束・発散を判定し，収束する場合はその値を求めよ.

問題２.　区間 $[0,1]$ 上で定義された関数列

$$f_k(x)=\frac{k^2x}{1+k^3x^2}-\frac{(k+1)^2x}{1+(k+1)^3x^2}\qquad(k=1,2,\ldots)$$

について以下の問いに答えよ.

(1) $x\in[0,1]$ を固定したとき，極限 $S(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f_k(x)$ を求めよ.

(2) 区間 $[0,1]$ 上で定義された関数列

$$F_k(x)=\int_0^x f_k(t)\,dt\qquad(k=1,2,\ldots)$$

を考える．区間 $[0,1]$ 上で，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty F_k(x)$ が関数 $\displaystyle\int_0^x S(t)\,dt$ に一様収束することを示せ.

(3) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ が区間 $[0,1]$ 上で一様収束するか否かを答えよ.

問題3． t を複素数，A_t を3次正方行列とし，線形写像 $F_t : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ を

$$F_t(\boldsymbol{x}) = A_t\,\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3)$$

で定義する．

$$F_t\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}t\\t\\4\end{bmatrix}, \quad F_t\left(\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-2t^2+4t+1\\t^2+4t-4\\-t+12\end{bmatrix}, \quad F_t\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}t^2-3t\\-3t+2\\t-8\end{bmatrix}$$

が成り立つとき，以下の問いに答えよ．

(1) A_t を求めよ．

(2) $t=0,1$ に対し，A_t の最小多項式 $m_t(X)$ をそれぞれ求めよ．

(3) $t=0,1$ のうち，A_t が対角化可能であるような t をすべて求めよ．また，求めた t に対し，$P_t^{-1}A_tP_t$ が対角行列となるような正則行列 P_t と，得られる対角行列 $P_t^{-1}A_tP_t$ をそれぞれ求めよ．

問題4． t を実数とする．線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ と $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1&-1\\2&-1\\1&2\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \quad g\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1&2\\0&4\\-4&1\\-1&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

で定義する．f の像を U とおき，g の像を V とおく．$\dim(U+V)=3$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) t を求めよ．

(2) 次の集合が $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示せ：

$$W = \left\{ \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix} \;\middle|\; \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2,\ f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{y}) \right\}.$$

(3) (2) の部分空間 W の基底を一組求めよ．

(4) $U \cap V$ の基底を一組求めよ．