2023年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2023年2月8日）

数学 I (9:30 – 11:30)

(1) 線形代数, 微分積分 計4題を解答しなさい.

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

(3) すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

(4) 試験終了後, 答案用紙は4枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１．　4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$ を次のように定める．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $A\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}$ を求めよ．またベクトル $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4$ で，$A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ を満たすものを一つ求めよ．

(2) $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の一組の基底を求めよ．

(3) (2) で求めた基底を $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とする．これに $\boldsymbol{v}$ 及び (1) で求めた $\boldsymbol{w}$ を加えた $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底であることを示せ．

(4) 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定める．この線形写像 f の基底 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ に関する表現行列を求めよ．

問題２．　n を 2 以上の自然数とし，実数を成分とする n 次正方行列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を V_n とおく．例えば，

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$$

である．写像 $f_n : V_n \to V_n$ を $f_n(A) = A + {}^tA$ $(A \in V_n)$ で定義する．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す．また，$W_n = \{A \in V_n \mid A \text{ は対称行列}\}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $A \in V_n$ に対して次を示せ：$A \in W_n \iff f_n(A) = 2A$.

(2) f_n が線形写像であることを示せ．

(3) W_2 と $\ker f_2$ それぞれについて，一組の基底と次元を求めよ．ただし，$\ker f_2$ は f_2 の核を表す．

(4) f_2 の表現行列 B が対角行列となるような V_2 の基底を一組求めよ．得られる表現行列 B も答えること．

問題３．　以下で定義される $\mathbb{R}$ 上の関数は双曲線関数とよばれる：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ , \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ .$$

いま $f(x) = \sinh x$ とおき，正の整数 n に対し

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) k が 0 以上の整数のとき，$f^{(2k)}(0) = 0$ であることを示せ．

(2) k が 0 以上の整数のとき，$f^{(2k+1)}(0)$ を求めよ．

(3) $x \in \mathbb{R}$ を固定したとき $R_{2n+1}(x) \to 0\ (n \to \infty)$ であることを示せ．必要ならば

$$\frac{x^n}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であることを用いてよい．

問題４．　以下の問いに答えよ．

(1) 次の累次積分を求めよ．

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 xye^{y^3}\, dy \right) dx$$

(2) 領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ 2x \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ における 2 重積分

$$I_2 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy$$

を求めよ．