2022 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2022 年 2 月 8 日）

数学 I (9:30 – 11:30)

(1) 線形代数，微分積分 計 4 題を解答しなさい.

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

(3) すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

(4) 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． a を複素数とする. 行列

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & -a-1 & 0 \\ a+10 & -a+5 & -9 \\ 2a+8 & -2a+4 & -9 \end{bmatrix}$$

に対し, 線形変換 $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3)$ と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) f の像 $\mathrm{im}\, f$ は a に依らないことを示し, $\mathrm{im}\, f$ の 1 組の基底を求めよ.

(2) A の固有値を求めよ.

(3) f が対角化可能であるとする. このとき a の値を求め, f の表現行列が対角行列となる $\mathbb{C}^3$ の 1 組の基底を求めよ.

問題２． $V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ を実数係数の 2 次以下の多項式全体のなす実ベクトル空間とする. $t \in \mathbb{R}$ に対し, 写像 $F_t : V \to \mathbb{R}^3$ を

$$F_t(f(x)) = \begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(t) \end{bmatrix} \qquad (f(x) \in V)$$

と定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) F_t が線形写像であることを示せ.

(2) V の基底 1, x, x^2 と $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する F_t の表現行列を求めよ.

(3) F_t が同型写像となるための t に関する必要十分条件を求めよ.

問題３．　以下の問いに答えよ.

(1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, ある $r \in (0,1)$ に対し $|a_{n+1} - a_n| \leq r^n$ $(n \geq 1)$ を満たすとする. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列となることを示せ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, $|a_{n+1} - a_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たすが, コーシー列でないような例を 1 つ挙げよ.

(3) $x \geq 0$ であるとき, 不等式 $x^3 e^{-x} \leq \left(\dfrac{3}{e}\right)^3$ を示せ.

(4) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^3 e^{-nx}$ は, 区間 $I = [0, \infty)$ 上で一様収束することを示せ.

問題４．　以下の問いに答えよ.

(1) 正の実数 n に対して, 次の積分値を求めよ.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + 4n^2 \cos^2 \theta} \, d\theta$$

(2) 正の実数 n に対して, $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2nx\}$ と定める. このとき次の極限を求めよ.

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{D_n} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy$$