2022年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2021年8月24日）

数学 I (9:30 – 11:30)

(1) 線形代数，微分積分 計4題を解答しなさい.

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

(3) すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

(4) 試験終了後, 答案用紙は4枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１．　a を実数として, 行列 A, B を

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -3 & 2\\ 3 & -1 & 5 & -1\\ 2 & 3 & -4 & -5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 0 & -4 & -a-3\\ -1 & -1 & -a^2+3\end{bmatrix}$$

とする. 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, $g\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ を

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4),\qquad g(\boldsymbol{y})=B\boldsymbol{y}\quad(\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3)$$

で定め, f, g の像をそれぞれ $\operatorname{im} f$, $\operatorname{im} g$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{im} f$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(2) g が単射でないとき, a の値を求めよ.

(3) $\operatorname{im} f$ と $\operatorname{im} g$ が一致するとき, a の値を求めよ.

問題２．　V をベクトル $\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\4\\-1\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-3\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする. さらに $V^{\perp}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \mid \forall \boldsymbol{y}\in V,\ \boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}\}$ と定める. ただし $\mathbb{R}^4$ には標準内積を入れる. 以下の問いに答えよ.

(1) V の次元と 1 組の正規直交基底を求めよ.

(2) $V^{\perp}$ は $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示し, $V^{\perp}$ の 1 組の基底を求めよ. ただし正規直交基底である必要はない.

(3) $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\\3\end{bmatrix}$ とする. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}\in V$, $\boldsymbol{c}\in V^{\perp}$ となる $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を求めよ.

問題３． $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ の収束・発散を判定し, 収束するときはその値を求めよ.

(3) 次の広義重積分の収束・発散を判定し, 収束するときはその値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+1}\,dxdy\,, \qquad D = \big\{(x,y)\ \big|\ x \geq 0,\ y \geq 0\big\}$$

問題４． 関数 $\sin\colon \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \big(-1,1\big)$, $\cos\colon \big(0,\pi\big) \to \big(-1,1\big)$ の逆関数をそれぞれ $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ で表す. n を正の整数, $f(x) = \cos^{-1} x$, $g(x) = \sin^{-1} x$ としたとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$ を示せ.

(2) $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+1)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$ を示せ.

(3) $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(4) $f^{(n)}(0) + g^{(n)}(0) = 0$ を示せ.

2022 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2021 年 8 月 24 日）

数学 II (13:00 – 14:30)

(1) 問題は全部で 9 題ある．そのうちの 2 題を選択して解答しなさい.

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

(3) すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

(4) 試験終了後, 答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． 複素数 p に対し, 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & p & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

が固有値 1 をもち, その重複度が 2 であるとき, 以下の問いに答えよ. (なお固有値の重複度は代数的重複度とも呼ばれる.)

(1) p の値を求めよ.

(2) A の固有値 1 について, 固有空間の基底を 1 組求めよ.

(3) A の 1 以外の固有値に関して, その固有空間の次元を求めよ.

(4) A の最小多項式 $m_A(x)$ を求めよ.

問題２． 環は全て可換環とし, 積に関する単位元 1 を持つものとする. 以下の問いに答えよ.

(1) I_1, I_2 を環 S のイデアルとする. このときイデアルの和 $I_1 + I_2$, 積 $I_1 I_2$ の定義を述べよ.

(2) $\mathbb{C}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[X, Y]$ において, $Y^2 - X^3 - 1$ で生成されたイデアル $\langle Y^2 - X^3 - 1 \rangle$ による剰余環 $R = \mathbb{C}[X, Y]/\langle Y^2 - X^3 - 1 \rangle$ を考える. X, Y の R での剰余類をそれぞれ x, y で表すことにする.

(i) R は整域であることを示せ.

(ii) $x, y - 1$ で生成されたイデアル $I = \langle x, y - 1 \rangle$ は R の極大イデアルであることを示せ.

(iii) I^3 は単項イデアルであることを示せ. ただし $I^3 = (I\,I)\,I$ と定める.

問題３． xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ において

$$x^2+y^2-z^2=-1 \quad \text{かつ} \quad z>1$$

によって与えられる曲面を S とする. xyz 空間内の xy 平面上の領域 D を

$$D=\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<x^2+y^2<1\}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) D 上の任意の点 Q に対し, 点 $A(0,0,-1)$ と点 Q を通る直線を ℓ とする. 点 Q の座標を

$$(u\cos v, u\sin v, 0) \qquad (0<u<1, 0\leq v<2\pi)$$

と表すとき, ℓ と S の共有点の座標 $\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ を u と v を用いて表せ.

(2) (1) で求めた ℓ と S の共有点の座標によって, 曲面 S のパラメータ表示を

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \qquad (0<u<1, 0\leq v<2\pi)$$

と定める. このパラメータ表示を用いて, S の第 1 基本量 E, F, G と第 2 基本量 L, M, N を求めよ. ただし, S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は $\dfrac{\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v}{|\boldsymbol{p}_u\times\boldsymbol{p}_v|}$ と定める.

(3) パラメータ表示 $\boldsymbol{p}(u,v)$ を用いて, 曲面 S のガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ.

問題４．　以下では $\mathbb{R}^2$ の位相は標準的なものを考える．区間 $[0, 2\pi]$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

とし，f による $\mathbb{R}^2$ の開集合の逆像全体を $\mathcal{O}_f$ とする．すなわち

$$\mathcal{O}_f = \{O \mid \mathbb{R}^2 \text{ のある開集合 } U \text{ が存在して } O = f^{-1}(U)\}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathcal{O}_f$ は $[0, 2\pi]$ の位相になることを示せ．

(2) 位相空間 $([0, 2\pi], \mathcal{O}_f)$ はコンパクトであることを示せ．

(3) 位相空間 $([0, 2\pi], \mathcal{O}_f)$ はハウスドルフ空間でないことを示せ．

問題５．　xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ において，xz 平面上の 4 次曲線 $z = -x^4 + x^2 + 2$ を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) S を $z = f(x, y)$ と表すとき，$f(x, y)$ を x, y の式で書け．また，S 上の点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ における S の法線ベクトルで z 成分が 1 であるものを求めよ．

(2) S と xy 平面で囲まれる領域の体積を求めよ．

(3) S の $z \geq 0$ の部分を S_1 とする．xyz 空間上のベクトル場

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x(1-z) + y^2 + z^2, y(1-z) + z^2 + x^2, z(1+z) + x^2 + y^2)$$

の S_1 上の面積分 $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ．ここで，dS は S_1 の面積素とし，$\boldsymbol{n}$ は S_1 の各点における単位法線ベクトルで z 成分が正であるものとする．

問題６．　複素領域 $U = \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \leq 0\}$ 上の関数

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{1+z^2}$$

について考える．ただし $z^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\mathrm{Log}\, z}$ とし，対数関数 Log を

$$\mathrm{Log}\,(re^{i\theta}) = \log r + i\theta, \quad r > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi,$$

$\log r$ は通常の実数値対数関数，

で定める．$R > 1$ に対し，複素平面上の曲線

$$C_{1,R} : \left[\frac{1}{R}, R\right] \ni t \mapsto t \in \mathbb{C},$$

$$C_{2,R} : [0,\ \pi] \ni \theta \mapsto Re^{i\theta} \in \mathbb{C},$$

$$C_{3,R} : \left[-R, -\frac{1}{R}\right] \ni t \mapsto t \in \mathbb{C},$$

$$C_{4,R} : [0,\ \pi] \ni \theta \mapsto \frac{1}{R}e^{i(\pi-\theta)} \in \mathbb{C}$$

を考え，それらをつなげた曲線 $C_{1,R} + C_{2,R} + C_{3,R} + C_{4,R}$ を C_R とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C_R を図示しなさい．

(2) 複素線積分 $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz$ の値を留数定理を用いて求めなさい．

(3)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_{2,R}} f(z)\,dz = 0, \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_{4,R}} f(z)\,dz = 0$$

であることを示しなさい．

(4) 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+x^2}\,dx$$

の値を求めなさい．

問題７．　以下の問いに答えよ.

(1) 次の連立微分方程式の初期値問題を解け.

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = 2X(t) + Y(t), \quad X(0) = X_0 \\ \dfrac{dY(t)}{dt} = 4X(t) - Y(t), \quad Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

ただし, X_0, Y_0 は実数とする.

(2) (1) で求めた解曲線 $(X(t), Y(t))$ が XY 平面内の曲線

$$(X - Y)^3(4X + Y)^2 = C$$

に含まれることを示せ. ただし, C は X_0, Y_0 に依存する適当な実数である.

(3) 常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - y - 6}{2x + y}$$

の一般解を求めよ.

問題８． $V=\{1,2,\ldots,n\}$ とし, 関数 $h,t\colon V\times V\to V$ をそれぞれ $h(i,j)=i$, $t(i,j)=j$ で定める. 集合 $\{(i,j)\in V\times V\mid i\neq j\}$ の相異なる m 個の元からなる部分集合 $\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ を E とする. さらに $(i,j)\in E$ ならば $(j,i)\notin E$ を満たすと仮定する. 以下では組 $G=(V,E,h,t)$ を有向グラフとみなす.

n 次対称行列 $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ 及び $m\times n$ 行列 $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ を次で定める.

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{ある } e\in E \text{ が存在して } \{h(e),t(e)\}=\{i,j\}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases},\qquad b_{ij}=\begin{cases}1 & h(e_i)=j\\ -1 & t(e_i)=j\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

また行列 C の転置行列を ${}^{t}C$ で表す. 以下の問いに答えよ.

(1) $n=3$, $m=3$, $e_1=(1,2)$, $e_2=(2,3)$, $e_3=(3,1)$ のとき, 行列 A と B を書き下しなさい.

(2) $x={}^{t}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し, Bx の第 i 成分を $x_{h(e_i)},x_{t(e_i)}$ を用いて表しなさい.

(3) 本小問ではグラフ G は連結であると仮定する. すなわち, 任意の $i,j\in V$ に対し, ある E の元の列 $e_{l_1},\ldots,e_{l_r}$ で, $i\in\{h(e_{l_1}),t(e_{l_1})\}$, $j\in\{h(e_{l_r}),t(e_{l_r})\}$ 及び $k=1,\ldots,r-1$ に対して

$$\{h(e_{l_k}),t(e_{l_k})\}\cap\{h(e_{l_{k+1}}),t(e_{l_{k+1}})\}\neq\emptyset$$

を満たすものが存在するとする. このとき $x\in\mathbb{R}^n$ に対し, $Bx=0$ であるならば, ある $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在して $x=\alpha\,{}^{t}(1,\ldots,1)$ となることを示しなさい.

(4) a を正の整数とする. 任意の $i\in V$ に対して, $e\in E$ で $i\in\{h(e),t(e)\}$ を満たすものの個数が a であるならば,

$${}^{t}BB=aI-A$$

が成り立つことを示しなさい. ただし, I は n 次単位行列とする.

問題９． n は自然数とし, S は要素の数が n の整数の数列 $S[j],\ j=0,1,\ldots,n-1$ であるとする (それら要素の値には重複するものが含まれていてもよい). また, 与えられた S の要素の値は変更することができず, 要素の値への参照は「S に対する走査」を用いてだけできるとする. ここで「S に対する走査」とは, 要素の値を添字を 0 から $n-1$ まで単調に変えながら参照することであるとする.

数列 S には要素の値を変更できないことと, 要素への参照は走査を用いてだけ行えるという制約があるが, アルゴリズムの記述では通常の配列のように表すことにする. また, 以下の各問の解答のアルゴリズムでは, 与えられた数列 S を除くと利用可能な記憶場所は整数の変数だけで, その個数は n には依らない定数とする. これらの制約から, S に対する走査の回数を減らすために S の複製を作って作業をすることはできないし, S のすべての要素を値の大小順に並べ直す作業もできない.

上記の前提のもとで, 以下の問いに答えよ. ただし, 解答のアルゴリズムは曖昧さのない言葉で手順が明確になるように記述してもよいし, あるいは何らかの手続き型プログラム言語か擬似的な手続き型プログラム言語により記述しても良い.

(1) n は 1 以上であるとする. n の値と数列 S が与えられたときに, S の要素の値の最大値と最小値の両方を同時に求めるアルゴリズムを示しなさい. ただし, このアルゴリズムは S に対する走査を 1 回だけ行うものとする.

(2) n は 2 以上であるとする. n の値と数列 S が与えられたときに, S の中の要素を値の降順 (非増加順) に並べた場合に 2 つめになる値を求めるアルゴリズムを示しなさい. ただし, このアルゴリズムは S に対する走査を 1 回だけ行うものとする.

たとえば $n=6$ で $S=[1,2,3,1,2,3]$ の場合には, 降順で 2 つめの値は 3 である.

(3) n は奇数であるとする. その場合の数列 S の中央値は, 仮に S の要素を値の大小順に並べたとすると中央に位置する要素の値である. n と S が与えられたときに, S の中央値を求めるアルゴリズムを示しなさい. ただし, このアルゴリズムは S に対する走査を何回でも行ってよいものとする.

たとえば $n=7$ で $S=[1,4,1,5,1,4,6]$ の場合には, その中央値は 4 である.

なお, 必要ならば以下を用いてよい. 整数 x が S の中央値であるならば, x より小さい S の要素の個数と x より大きい S の要素の個数はどちらも $(n-1)/2$ 以下でなければならない.