2021 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2021 年 2 月 9 日）

数学 I (9:30 – 11:30)

(1) 線形代数，微分積分 計 4 題を解答しなさい.

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

(3) すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

(4) 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１．　$\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る 2 直線 l_1, l_2 を以下のように与える。 l_1 の方向ベクトルを

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とし，

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$$

と定める。 さらに l_1 と垂直で原点を通る平面を H とする。以下の問いに答えよ。

(1) l_1 と l_2 の双方に直交するベクトル $\boldsymbol{b}$ を 1 つ求めよ。ただし，$\boldsymbol{b}$ は零ベクトルでないとする。

(2) ベクトルの組 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間 H の基底となるような $\boldsymbol{c}$ を 1 つ求めよ。

(3) 部分空間 H への正射影を f とする。$\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と H の基底 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に関する f の表現行列を求めよ。

(4) 直線 $f(l_2)$ の方程式を求めよ。

問題２．　行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ に対して線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2)$$

と定める。また自然数 n に対して $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$（$n$ 回）を f の n 回の合成写像とする。以下の問いに答えよ。

(1) ある実数 p, q が存在して

$$f^2(\boldsymbol{x}) = pf(\boldsymbol{x}) + q\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2)$$

となることを示せ。また p, q の値を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して，ある実数 p_n, q_n が存在して

$$f^n(\boldsymbol{x}) = p_n f(\boldsymbol{x}) + q_n \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2)$$

となることを示せ。また p_n, q_n を n の式で表せ。

問題３．　２変数関数 $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$ に対して以下の問いに答えよ。

(1) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を満たす点 (a,b) をすべて求めよ。

(2) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ。

(3) $R > 0$ とするとき次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy\,, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$$

問題４．　$r > 0$ に対して

$$n_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left(-\frac{x^2}{2r}\right), \qquad N_r(x) = \int_0^x n_r(\sigma)d\sigma$$

と定める。 以下の問いに答えよ。

(1) $r > 0$ に対して $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} n_r(x)dx = 1$ が成り立つことを示せ。

(2) $x > 0,\, 0 < t < 1$ に対して次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\int_x^{\infty} N_{1-t}(y-x)\frac{y}{t}n_t(y)dy = \int_0^{\infty} n_t(y+x)n_{1-t}(y)dy$$

(3) $0 < t < 1$ に対して次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to +0} \int_x^{\infty} N_{1-t}(y-x)\frac{y}{t}n_t(y)dy$$