2021 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（2020 年 8 月 25 日）

数学Ⅰ (9:30 – 11:30)

(1) 線形代数，微分積分 計 4 題を解答しなさい.

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

(3) すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

(4) 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． $M(2,\mathbb{C})$ を複素数を成分とする 2 次正方行列全体からなる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする。行列

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を用いて，線形写像 $f\colon M(2,\mathbb{C}) \to M(2,\mathbb{C})$ を

$$f(A) = BA - AB$$

と定めるとき， 以下の問いに答えよ。

(1) E_{ij} を (i,j) 成分が 1，他の成分は 0 であるような 2 次正方行列とする。任意の $i,j \in \{1,2\}$ に対し $f(E_{ij})$ を求めよ。

(2) $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ はベクトル空間 $M(2,\mathbb{C})$ の基底となることを示せ。

(3) $M(2,\mathbb{C})$ の基底 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ に関する f の表現行列を求めよ。

(4) 写像 f の核 $\ker f$ の 1 組の基底を求めよ。

問題２． a, b, c を相異なる複素数，行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A は正則行列であることを示せ。
(2) p, q, r を複素数とする。３次方程式 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ が a, b, c を解に持つとき，行列

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r & -q & -p \end{bmatrix}$$

が複素数の範囲で対角化可能かどうか判定せよ。対角化可能ならば，$P^{-1}BP$ が対角行列となるような正則行列 P および $P^{-1}BP$ を求めよ。

問題３．　関数 $\tan : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ の逆関数を $\tan^{-1}$ で表すとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\tan^{-1} x$ の導関数は $\dfrac{1}{x^2+1}$ であることを示せ。

(2) 2 変数関数 $f(x,y) = \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$ ($x \neq 0$) の第 2 次までの偏導関数をすべて求めよ。

(3) $0 < a < 1$ とするとき，次の重積分の値を求めよ。

$$\iint_{D_a} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy\,, \qquad D_a = \left\{(x,y) \;\middle|\; a \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\right\}$$

(4) 次の広義重積分の収束・発散を判定せよ。

$$\iint_{D} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy\,, \qquad D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 < x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\right\}$$

問題４．　以下の問いに答えよ。

(1) f を区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数とする。区間 $[0, 1]$ において次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x)$$

ただし，微分は区間の左端では右微分，区間の右端では左微分，それ以外の点では通常の微分とする。

(2) f を区間 $[0, 1]$ 上の実数値 C^1 級関数とする。次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_0^1 \frac{df}{dx}(x)\,dx = f(1) - f(0)$$

2021 年度 東京都立大学 大学院（博士前期課程）

理学研究科　数理科学専攻

入学試験（**2020** 年 **8** 月 **25** 日）

数学 II **(13:00 – 14:30)**

(1) 問題は全部で **9** 題ある．そのうちの **2** 題を選択して解答しなさい．

(2) 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

(3) すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

(4) 試験終了後, 答案用紙は **2** 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１． a を複素数として，行列

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & -4 & 4\\ -3 & 6 & a & 6\\ -1 & 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

の固有値はただ1つであるとする。以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値と a の値を求めよ。

(2) A のジョルダン標準形 J と $J=P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P を求めよ。

問題２． $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ とおき，$\mathbb{R}^*, \mathbb{R}$ をそれぞれ乗法，加法に関して群と考える。各 $a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}$ に対し，写像 $f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f_{a,b}(x)=ax+b \quad (x\in\mathbb{R})$$

で定義するとき，以下の問いに答えよ。

(1) $G=\{f_{a,b}\mid a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}\}$ とおく。$f_{a,b}, f_{c,d}\in G$ の積を $f_{a,b}\circ f_{c,d}$（合成写像）と定めるとき，G が群であることを示せ。

(2) $\varphi: G\ni f_{a,b}\mapsto f_{a,b}(1)-f_{a,b}(0)\in\mathbb{R}^*$ が群の準同型であることを示せ。

(3) $N=\{f_{1,b}\mid b\in\mathbb{R}\}$ が G の正規部分群であることを示せ。さらに，剰余群 G/N と $\mathbb{R}^*$ が同型であることを示せ。

(4) 群 $\mathbb{R}^*$ と $\mathbb{R}$ の直積を $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ とするとき，G と $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ が同型であるか答えよ。答えだけでなく理由も述べること。

問題３． $f:X\to Y$ を位相空間 X, Y の間の写像とする。f が連続写像であるとは，Y の任意の開集合 O に対し，逆像 $f^{-1}(O)$ が X の開集合であることをいう。以下の問いに答えよ。

(1) f が連続写像であるための必要十分条件は，Y の任意の閉集合 F に対し，逆像 $f^{-1}(F)$ が X の閉集合であることを示せ。

(2) f が連続写像であるとき，X の任意の部分集合 A に対し，$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ が成り立つことを示せ。ただし，$\overline{A}$, $\overline{f(A)}$ は，それぞれ A, $f(A)$ の X, Y における閉包を表す。

(3) X の任意の部分集合 A に対し，$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ が成り立つとき，f は連続写像であることを示せ。

問題４． xyz 空間内の曲面 S は次のようにパラメータ表示されている。

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (u\cos v, u\sin v, v),$$
$$(u,v) \in U = \{(u,v) \mid 0 \le u \le v, 0 \le v \le 2\pi\}$$

また，ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (-y, x, x^2+y^2+z^2)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ。

(2) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$ を求めよ。

(3) ベクトル場 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$ の S 上の面積分 $\displaystyle\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ の値を求めよ。ここで dS は S の面積素とし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルでその向きは (1) のベクトルと同じ向きとする。

(4) 曲線 C は次のようにパラメータ表示されている。

$$C:\ \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t\cos t, t\sin t, t), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ。

問題５． xyz 空間内の xz 平面において

$$(x,z) = \big(f(u),\ g(u)\big)$$

と弧長パラメータで表示された C^∞ 曲線を C とする。すなわち，$f(u)$ と $g(u)$ は C^∞ 級関数であり，$\big(f'(u)\big)^2 + \big(g'(u)\big)^2 = 1$ を満たすとする。さらに，$f(u) > 0$ と仮定する。

xyz 空間において，曲線 C を z 軸の回りに回転してできる曲面，すなわち，

$$\boldsymbol{p}(u,v) = \big(f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u)\big)$$

とパラメータ表示された曲面を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) S の第一基本量 E, F, G を求めよ。

(2) S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}$ と同じ向きに定めるとき S の第二基本量 L, M, N を求めよ。

(3) S のガウス曲率 K および平均曲率 H を求めよ。

(4) a を正の定数とする。

$$f(u) = a\cosh u, \quad g(u) = \int_0^u \sqrt{1 - a^2\sinh^2 t}\,dt \qquad \left(\sinh^{-1}\Big(-\frac{1}{a}\Big) < u < \sinh^{-1}\frac{1}{a}\right)$$

として，$(x,z) = \big(f(u),\ g(u)\big)$ によって曲線 C を定める。このとき，$(x,z) = \big(f(u),\ g(u)\big)$ は曲線 C の弧長パラメータ表示であることを示し，曲線 C を z 軸の回りに回転してできる曲面のガウス曲率 K を求めよ。

問題６．　以下の問いに答えよ。

(1) 実数 x, y に対して次の等式が成り立つことを示せ。

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

(2) 複素関数 $\cos z$ のすべての零点とその位数を求めよ。

(3) 複素関数 $\dfrac{e^{-z}}{\cos z}$ のすべての特異点と各特異点での留数を求めよ。

(4) N を自然数とする。閉曲線 C_N を半円板 $D_N = \left\{ z = x+iy \;\middle|\; x^2+y^2 < N^2,\, x > 0 \right\}$ の境界でその向きは正の向きとするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{N\to\infty} \int_{C_N} \frac{e^{-z}}{\cos z}\, dz$$

問題７．　以下の問いに答えよ。

(1) $\varepsilon > 0$ に対して，微分方程式

$$u''(t) - 2u'(t) + (1-\varepsilon^2)u(t) = 0$$

の一般解を求めよ。

(2) $\varepsilon > 0$ に対して，初期値問題

$$u''(t) - 2u'(t) + (1-\varepsilon^2)u(t) = e^t, \qquad u(0) = 1, \qquad u'(0) = 0$$

の解 $u_\varepsilon(t)$ を求めよ。

(3) 極限関数 $u(t) = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} u_\varepsilon(t)$ を求めよ。

問題８．　$\Gamma = (V, E)$ をグラフとする。ただし，V は頂点の集合，E を辺の集合とする。本問でグラフとは，有限無向単純グラフのことをいう。すなわち頂点の数は有限個であり，辺に向きは定めず，各辺はちょうど 2 つの頂点をもち，端点が同じ頂点 となる辺（ループ）はなく，複数の辺で同じ端点集合をもつもの（多重辺）もないものとする。

Γ の頂点の列 $(v_0, \ldots, v_n)$ で任意の $1 \le i \le n$ に対して $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ を満たすものを，v_0 を出発する長さ n の歩道という。頂点 $v \in V$ に対し，v を出発する長さ n の歩道の個数を $a_n(v)$ で表し，$a_0(v) = 1$ と定める。無限級数 $f_v(t)$ を

$$f_v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(v) t^n$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) 頂点 v を端点にもつ辺の個数を $\deg(v)$ で表す。$M = \max\{\deg(w) \mid w \in V\}$ とするとき $a_n(v) \le M^n$ が成り立つことを示せ。

(2) ある $R > 0$ が存在して，$|t| < R$ なら $f_v(t)$ は絶対収束することを示せ。

(3) $f_v(t)$ は t の有理関数であることを示せ。

問題９．　n は0以上の整数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) f, g は0以上の整数全体を定義域とし，正の実数全体に値を取る関数とする。

$$f(n) = O(g(n))$$

であることの定義を述べよ。ここで O はランダウの記号（オーダー記号）である。

(2) $f(n) = n! + n^{2020} + 2^n$ のとき $f(n) = \boxed{\quad X \quad}$ である。空欄 $\boxed{\quad X \quad}$ に最もよくあてはまる式を (1) のランダウの記号（オーダー記号）を用いて答えよ（答えのみでよい）。

いま $n\ (\geq 2)$ 枚のコインが用意されており，このうち1枚だけが他と比べて軽いことがわかっている。この1枚を，天秤だけを使用して特定したい。自然数 k に対して天秤を k 回だけ使用して特定できるコインの枚数 n の最大値を n_k とする。以下の問いに答えよ。答えだけでなくその根拠（計算過程など）も述べること。

(3) n_k を k を用いて表し，その根拠（特定するアルゴリズムおよび最大値である理由）を述べよ。

(4) n 枚のコインの中から軽いコイン1枚を天秤だけを使用して特定するアルゴリズムの中で，天秤の使用回数が最小となるものを示せ。また，最小となるアルゴリズムの天秤の使用回数を $f(n)$ とするとき，$f(n)$ を (1) のランダウの記号（オーダー記号）を用いて表せ。