2020 年度 東京都立大学（現 首都大学東京）大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（2020 年 2 月 6 日）

数学 I (9:30 – 11:30)

1. 微分積分, 線形代数 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題 1. 行列 A を以下のように定める.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & -6 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) A と転置行列 ${}^tA$ の積 $A\,{}^tA$ を求めよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 2 次正方実行列 B, C が存在して, $\det(A) = \det(B+iC)\det(B-iC)$ となることを示せ. ただし det は行列式を表し, 本小問の i は虚数単位を表す.

問題 2. n と r は正の整数で, $n \geq r$ とする. V を n 次元実ベクトル空間とする. V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が張る V の部分空間を $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ で表し, 空集合が張る部分空間とは $\{\boldsymbol{0}\}$ であるとする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ として, W を V の部分空間とする. $\boldsymbol{x} \notin W$ かつ $\boldsymbol{x} \in W + \langle \boldsymbol{y} \rangle$ ならば, $\boldsymbol{y} \notin W$ かつ $\boldsymbol{y} \in W + \langle \boldsymbol{x} \rangle$ であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V$ とする. このとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が 1 次独立であることと, すべての i $(1 \leq i \leq r)$ に対して $\boldsymbol{v}_i \notin \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ であることが同値であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を 2 組の V の基底とする. このとき, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{w}_j$ が V の基底になる j $(1 \leq j \leq n)$ が存在することを示せ.

問題３． 以下の問いに答えよ．

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$ として, 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D x \sin y \, dxdy$$

(2) $\alpha, \beta > 0$ として, 広義積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta}\, dx$ が収束するための, α と β に関する必要十分条件を求めよ．

(3) $f \in C^1(\mathbb{R})$ で, ある定数 $M > 0$ があって $|f'(x)| \leq M$ $(x \in \mathbb{R})$ を満たすとする．このとき, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ．

(4) $f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続ではないことを示せ．

問題４． 自然数（1 以上）全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す．実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は, $a_0 = 0$ かつ任意の非負整数 $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, 次を満たすとする．

$$a_n + a_m - p \leq a_{n+m} \leq a_n + a_m + p$$

ただし, p は n, m に依らない実数とする．このとき, 次を示せ．

(1) 任意の自然数 k, N と非負整数 r に対し, 次が成り立つ．

$$a_{kN+r} \leq ka_N + a_r + kp$$

(2) 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は下に有界である．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ が存在する．

(4) 任意の自然数 N に対して, 次が成り立つ．

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} - \frac{a_N}{N}\right| \leq \frac{p}{N}$$