2020 年度 東京都立大学（現 首都大学東京）大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（2019 年 8 月 27 日）

数学 I (9:30 – 11:30)

1. 微分積分, 線形代数 計 4 題を解答しなさい.

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること.

3. すべての答案用紙に, 氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること.

4. 試験終了後, 答案用紙は 4 枚とも提出すること. 問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること.

問題１． c を実数として,

$$A = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 & 1 \\ 1 & c & 1 & 2 \\ 2 & 1 & c & 1 \\ 1 & 2 & 1 & c \end{bmatrix}$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) $c = 3$ とする．A の固有値をすべて求め, 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

問題２． V をベクトル空間, $f\colon V \to V$ を線形変換, f の像を $\mathrm{im} f$, 核を $\ker f$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 線形変換 f が $f \circ f = f$ を満たすとき, $\mathrm{im} f = \{x \in V \mid f(x) = x\}$ が成り立つことを示せ.

(2) 線形変換 f が $f \circ f = f$ を満たすとき, $V = \ker f \oplus \mathrm{im} f$ が成り立つことを示せ.

(3) 線形変換 f に対し $V = \ker f \oplus \mathrm{im} f$ が成り立つとき $f \circ f = f$ が成り立つか, 正しいなら証明を与え, 正しくないなら反例を挙げよ.

問題３． 以下の問いに答えよ．

(1) 平面上の点 $A = \left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$ $(a > 0)$ を中心とする半径 $\dfrac{a}{2}$ の円周を S とする．S 上の点 P を極座標 (r, θ) を用いて $P = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と表したとき，r を a と θ を用いて表せ．

(2) 次の二つの不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, \quad x^2 + y^2 \le ax \ (a > 0)$$

を満たす点 (x, y, z) が成す領域を G とする．G 上の関数 f を

$$f(x, y, z) = |z| \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

と定める．次の重積分の値を求めよ．

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dxdydz$$

問題４． 自然数全体を定義域とする実数値関数 f に対し，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} f(i + j)$ で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $n \ge 2$ のとき，$a_n - a_{n-1}$ を n と $f(n)$ で表せ．

(2) $f(k) = \dfrac{1}{k^3}$ のとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列になることを示せ．

(3) $f(k) = \dfrac{1}{k^2 + 1}$ のとき，a_n は $n \to \infty$ で収束するか発散するかを答え，それを証明せよ．

(4) $|x| < 1$ の範囲で，$\dfrac{1}{1 + x^2}$ をマクローリン展開せよ． それを利用して，$f(k) = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k(2k-1)}$ のときの $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

2020 年度 東京都立大学（現 首都大学東京）大学院（博士前期課程）
理学研究科　数理科学専攻
入学試験（2019 年 8 月 27 日）

数学 II (13:00 – 14:30)

1. 問題は全部で 9 題ある．そのうちの 2 題を選択して解答しなさい．

2. 問題ごとに別の答案用紙を用いること．

3. すべての答案用紙に，氏名・受験番号・解答する問題の番号を記入すること．

4. 試験終了後，答案用紙は 2 枚とも提出すること．問題用紙と計算用紙は各自持ち帰ること．

問題１． 行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \\ -7 & 5 & -8 & 5 \\ -8 & 7 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) A がべき零行列であることを証明せよ.

(2) A のジョルダン標準形 J と $J = P^{-1}AP$ を満たす正則行列 P を求めよ.

問題２． 次の (1) から (4) の主張はそれぞれ正しいか. 正しければ証明し, 誤りならば反例とその根拠（それが反例であることの証明）を与えなさい. なお $|G|$ は群 G の位数, $Z(G)$ は群 G の中心を表す.

(1) C_1, C_2 が共に巡回群ならば, 直積 $C_1 \times C_2$ も巡回群である.

(2) G を有限群, p を素数とする. このとき $|G| = p$ ならば $Z(G) = G$ である.

(3) R を開区間 $(-1, 1)$ 上で定義された実数値連続関数全体とし, その加法と乗法を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (fg)(x) = f(x)g(x) \quad (f, g \in R,\ x \in (-1,1))$$

と定義する. このとき R は整域である.

(4) 実数係数 2 変数多項式環 $\mathbb{R}[x, y]$ は単項イデアル整域である.

問題３． 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S は, C^∞ 級関数 f を用いて

$$\boldsymbol{p}(u,v) = (u, v, f(u,v)) \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

とパラメーター表示され, さらに S の各点 $\boldsymbol{p}(u,v)$ において, $\boldsymbol{p}(u,v)$ を通り $\boldsymbol{p}_u(u,v)$ に平行な直線と, $\boldsymbol{p}(u,v)$ を通り $\boldsymbol{p}_v(u,v)$ に平行な直線が S に含まれているとする. ただし, $\boldsymbol{p}_u$, $\boldsymbol{p}_v$ はそれぞれパラメーター u, v による $\boldsymbol{p}$ の偏微分とする. また, 曲面 S の単位法線ベクトルの第 3 成分は正とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $x, y, s, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x+s, y) = f(x,y) + sf_u(x,y), \quad f(x, y+t) = f(x,y) + tf_v(x,y)$$

であることを示せ. ただし, $f_u(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,y)$, $f_v(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ とする.

(2) $f(u,v)$ は, u, v に依存しない定数 A, B, C を用いて

$$f(u,v) = f(0,0) + Au + Bv + Cuv$$

と表されることを示せ.

(3) S の各点 $\boldsymbol{p}(u,v)$ における第 1 基本量 E, F, G を u, v, A, B, C を用いて表せ.

(4) S の各点 $\boldsymbol{p}(u,v)$ における第 2 基本量 L, M, N を u, v, A, B, C を用いて表せ.

(5) S の各点 $\boldsymbol{p}(u,v)$ におけるガウス曲率 K と平均曲率 H を u, v, A, B, C を用いて表せ.

問題４． 2 つの空でない位相空間 $(X_1, \mathcal{U}_1), (X_2, \mathcal{U}_2)$ に対し,

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

と定義する. さらに写像 $\pi_1 : X \to X_1$ と写像 $\pi_2 : X \to X_2$ を $\pi_1(x_1, x_2) = x_1, \quad \pi_2(x_1, x_2) = x_2$ で定義するとき, 以下の問いに答えよ.

(1) X の部分集合族 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B} = \left\{ U_1 \times U_2 \;\middle|\; U_1 \in \mathcal{U}_1,\ U_2 \in \mathcal{U}_2 \right\}$ と定める. このとき, 任意の $B, B' \in \mathcal{B}$ に対し $B \cap B' \in \mathcal{B}$ が成り立つことを示せ.

(2) X の部分集合族 $\mathcal{U}$ を $\mathcal{U} = \left\{ \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B \;\middle|\; \mathcal{B}_0 \text{ は } \mathcal{B} \text{ の部分集合} \right\}$ と定める. このとき $(X, \mathcal{U})$ が位相空間になることを示せ.

(3) 小問 (2) で定めた位相 $\mathcal{U}$ に対し, 写像 $\pi_1 : (X, \mathcal{U}) \to (X_1, \mathcal{U}_1)$ が開写像になることを示せ.

問題５． xyz 空間内の立体 D を次で与える．

$$x^2+y^2\le 1,\quad -\sqrt{1-x^2-y^2}\le z\le 3+\sqrt{1-x^2-y^2}$$

D の境界を S とし，S 上の点における外向き法線ベクトルを $\mathbf{n}$，面積素を dA で表す．S のうち，$0\le z\le 3$ を満たす部分を S' とし，$z\le 0$ または $3\le z$ を満たす部分を S'' とする．D 上のベクトル場 $\mathbf{F}(x,y,z)=(-y,x,z+2xz)$ に対し，以下の問いに答えよ．

(1) D を図示せよ．

(2) 面積分 $\displaystyle\iint_{S'}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$ の値を求めよ．

(3) 面積分 $\displaystyle\iint_{S''}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA$ の値を求めよ．

問題６． 複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義された関数 $F(z)=\dfrac{z^2}{z^3+1}e^{iz}$ を考える．$0<\epsilon<1$ かつ

$1+\epsilon<R$ をみたす実数 ϵ と R に対し，$\mathbb{C}$ 内の曲線 $C_{1,R}$, $C_{2,R,\epsilon}$, $C_{3,\epsilon}$, $C_{4,R,\epsilon}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
C_{1,R}&: [0,\pi]\ni\theta\mapsto Re^{i\theta}\in\mathbb{C},\\
C_{2,R,\epsilon}&: [-R,-1-\epsilon]\ni t\mapsto t\in\mathbb{C},\\
C_{3,\epsilon}&: [0,\pi]\ni\theta\mapsto -1+\epsilon e^{i(\pi-\theta)}\in\mathbb{C},\\
C_{4,R,\epsilon}&: [-1+\epsilon,R]\ni t\mapsto t\in\mathbb{C}
\end{aligned}$$

で定める．各曲線にはパラメーター（θ または t）が増加する向きが付いているものとし，これらを順につないだ曲線を $C_{R,\epsilon}=C_{1,R}+C_{2,R,\epsilon}+C_{3,\epsilon}+C_{4,R,\epsilon}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 積分路 $C_{R,\epsilon}$ を図示し，留数定理を用いて複素線積分 $\displaystyle\int_{C_{R,\epsilon}}F(z)\,dz$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_{1,R}}F(z)\,dz=0$ であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{C_{3,\epsilon}}F(z)\,dz$ の値を求めよ．

(4)
$$\lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-1-\epsilon}\frac{x^2}{x^3+1}e^{ix}\,dx+\int_{-1+\epsilon}^{\infty}\frac{x^2}{x^3+1}e^{ix}\,dx\right)$$

の値を求めよ．（この値を $\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^3+1}e^{ix}\,dx$ で表し，主値積分とよぶ．）

問題７． 以下の問いに答えよ．

(1) 次の 1 階微分方程式の初期条件を満たす解を求めよ．

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = t\,, \qquad y(0) = -1$$

(2) 次の 1 階微分方程式の初期条件を満たす解 $y(t)$ と極限値 $\lim_{t\to\infty} y(t)$ を求めよ．

$$\frac{dy}{dt} + 4ty = 2t\sqrt{y}\,, \qquad y(0) = y_0 > 0$$

(3) 実数値関数 $f(t)$ は $[0, \infty)$ で連続で，常に $f(t) \geq 0$ を満たし，有限な極限値 $\lim_{t\to\infty} f(t) = L > 0$ が存在するとする．このとき，次の 1 階微分方程式の初期条件を満たす解 $y(t)$ に対して極限値 $\lim_{t\to\infty} y(t)$ を求めよ．

$$\frac{dy}{dt} - 2y = f(t)y^2\,, \qquad y(0) = y_0 < 0$$

問題８． n を正の整数とする. $2n$ 個の項からなる実数列

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$$

を

$$a_{n+1}, a_1, a_{n+2}, a_2, \ldots, a_{2n}, a_n$$

と並べ替える事を考える. つまり, 初項が a_{n+1} で, a_j $(1 \leq j \leq n-1)$ が a_{n+j} の直後に, a_{n+1+j} が a_j の直後になるような並べ替えを考える. ただし, a_n は $2n$ 番目に移されるとする。ここでは, この並べ替えの操作をシャッフルと呼ぶことにする. もともと前から i 番目にあった項は, このシャッフルの後, 前から $S(i)$ 番目に移されるとする. 例として $n = 4$ のときを考えると, $S(1) = 2, S(2) = 4, S(3) = 6, S(4) = 8, S(5) = 1, S(6) = 3, S(7) = 5, S(8) = 7$ となる.

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $S(i)$（$1 \leq i \leq 2n$）を i と n を用いて表せ.

(2) k を正の整数とする。前から i 番目にあった項は, シャッフルを k 回繰り返した後, $S^k(i)$ 番目に移されるとする. $2n+1$ が素数のとき, シャッフルを $2n$ 回繰り返すと, 最初の数列と一致することを示せ. すなわち, $S^{2n}(i) = i$ （$1 \leq i \leq 2n$）が成り立つことを示せ.

問題９． a と b は異なる文字とし, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ とする．また, Σ 上の語全体を Σ^* で表す．以下の問いに答えよ．

(1) いま有限オートマトン M の入力記号の集合は上記の Σ で, M の状態の集合は $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ であるとする．そのうちで受理状態は q_0 と q_2 だけであるとし, 初期状態は q_0 とする．そうして状態遷移関数 $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ は, $\delta(q_0, \mathtt{a}) = q_0$, $\delta(q_0, \mathtt{b}) = q_1$, $\delta(q_1, \mathtt{a}) = q_0$, $\delta(q_1, \mathtt{b}) = q_2$, $\delta(q_2, \mathtt{a}) = q_2$, $\delta(q_2, \mathtt{b}) = q_2$ であるとする．Σ 上の語で長さ 4 のもののうち, 有限オートマトン M によって受理（accept）されるものがいくつあるか求めよ．

(2) $L = \{w \in \Sigma^* | w$ の長さは正の平方数 $\}$ とおく．L が正規言語（regular language）でないことを証明したい．以下の空欄（ア），（イ），（ウ），（エ），（オ）のそれぞれにふさわしい文章, 数式, または数式を含んだ文章を答えよ．枠に収まらない長さでもかまわない．

まず,

$(\star)$ 正の整数 m, n が $m \leq n$ をみたすならば, $m + n^2$ は平方数でない

ことに注意する（証明：$\boxed{\quad\textbf{ア}\quad}$）．

背理法の仮定として, L が正規言語であるとする．十分大きな正の数 r を固定する．このとき長さ r 以上の $w \in L$ は, 必ず $w = xyz$（ただし $x, y, z \in \Sigma^*$ かつ $\boxed{\quad\textbf{イ}\quad}$）と分解できる．いまこのような w として, とくに $\boxed{\quad\textbf{ウ}\quad}$ をとる．すると上記のような分解 $w = xyz$ がある．整数 m, n として $\boxed{\quad\textbf{エ}\quad}$ をとると, $\boxed{\quad\textbf{オ}\quad}$．これは $(\star)$ と矛盾する．以上により, L が正規言語でないことが証明された．